Confronto tra basi demografiche: tre strumenti applicati al caso A62 vs IPS55

Jean M. Morales, PhD

Pomeriggio Attuariale Torinese
4 dicembre 2014

Introduzione

A gennaio l'ANIA ha pubblicato le nuove tavole demografiche A62. Cosa è cambiato rispetto alle precedenti IPS55?

- Le tavole di mortalità sono distribuzioni di probabilità: confronto tra **momenti**;
- Allungamento della vita umana: ripercussioni sulla riserva aggiuntiva per **longevità**;
- Rendite reversibili: cambiano le possibili **distribuzioni congiunte** teoriche.

Momenti 1/4: speranza di vita

È il valore atteso della vita umana residua per una età x.
La "vita media incompleta" si calcola come

$$e_x = \mathbb{E}[T] = \sum_h h \cdot \frac{\ell_{x+h} - \ell_{x+h+1}}{\ell_x}.$$

Ci concentriamo su e_0 e e_{65}.

Momenti 2/4: dispersione della speranza di vita

La varianza della stessa variabile è

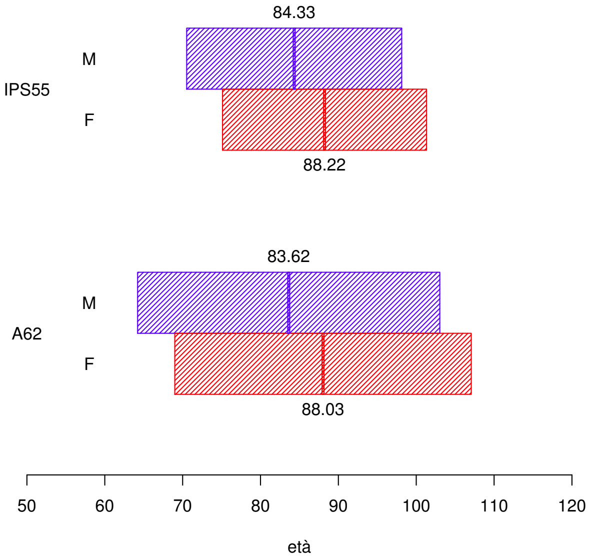
$$v_x = \mathbb{E}[T^2] - (\mathbb{E}[T])^2 = \sum_h h^2 \cdot \frac{\ell_{x+h} - \ell_{x+h+1}}{\ell_x} - e_x^2.$$

Noi siamo interessati per confrontabilità a

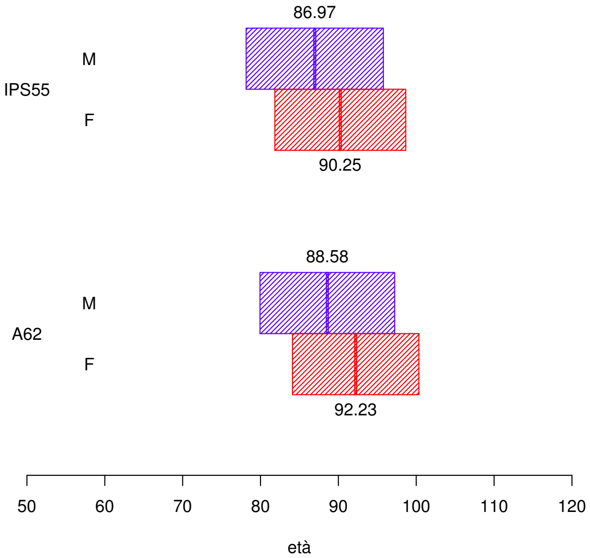
$$s_x = \sqrt{v_x},$$

ed in particolare a s_0 e s_{65}.

Momenti 3/4: confronti visivi per e_0 e s_0



Momenti 4/4: confronti visivi per e_{65} e s_{65}



Longevità 1/5: riserva aggiuntiva per rischio longevità

La riserva aggiuntiva per rischio di longevità si calcola come

$$R = \sum_k C_k \cdot \rho \cdot \left(a_k^{\textbf{real}\text{istica}} - a_k^{\textbf{tar}\text{iffa}} \right),$$

e il suo peso percentuale sulla riserva matematica è

$$r = \frac{R}{\sum_k C_k \cdot a_k^{\textbf{tar}}} = \rho \cdot \left(\frac{\sum_k C_k \cdot a_k^{\textbf{real}}}{\sum_k C_k \cdot a_k^{\textbf{tar}}} - 1 \right).$$

Longevità 2/5: introduzione di una nuova base

Tipicamente la riserva aggiuntiva cresce ($I > 0$):

$$R^* = \sum_k C_k \cdot \rho \cdot \left(a_k^{\textbf{n}\text{uova }\textbf{b}\text{ase}} - a_k^{\textbf{tar}} \right) =$$

$$\sum_k C_k \cdot \rho \cdot \left(a_k^{\textbf{nb}} - a_k^{\textbf{real}} + a_k^{\textbf{real}} - a_k^{\textbf{tar}} \right) = I + R.$$

L'impatto in termini assoluti è additivo.

Longevità 3/5: impatto percentuale tra due basi

Siano real = IPS55 e nb = A62. L'impatto del passaggio dall'una all'altra base si esplicita come

$$I = \sum_k C_k \cdot \rho \cdot \left(a_k^{\text{nb}} - a_k^{\text{real}} \right) .$$

In termini relativi possiamo calcolare l'incremento rapportadolo alla riserva calcolata con le basi realistiche,

$$\iota = \frac{\sum C_k \cdot \rho \cdot \left(a_k^{\text{nb}} - a_k^{\text{real}} \right)}{\sum_k C_k \cdot a_k^{\text{real}}} = \rho \cdot \left(\frac{\sum_k C_k \cdot a_k^{\text{nb}}}{\sum_k C_k \cdot a_k^{\text{real}}} - 1 \right) ,$$

e la forma dell'espressione è analoga alla precedente. Questi incrementi si compongono.

Longevità 4/5: cosa è cambiato da IPS55 ad A62

Per esposizione uniforme (tralasciando ρ):

- su popolazione generale: $\iota = 3.49\%$;
- su popolazione $\mathcal{N}(\mu = 70, \sigma = 5)$: $\iota = 7.28\%$;
- su popolazione $\mathcal{N}(\mu = 88.58, \sigma = 8.65)$: $\iota = 8.97\%$.

Per le femmine, rispettivamente: 4.26%, 8.01%, 12.48%[1].
Popolazioni di 10^5 elementi.

[1] $\mathcal{N}(\mu = 92.23, \sigma = 8.12)$

Longevità 5/5: cosa è cambiato da RG48 a IPS55

Il passaggio da RG48 a IPS55:

- su popolazione generale: $\iota = 6.24\%$;
- su popolazione $\mathcal{N}(\mu = 70, \sigma = 5)$: $\iota = 12.15\%$;
- su popolazione $\mathcal{N}(\mu = 88.58, \sigma = 8.65)$: $\iota = 22.06\%$.

Per le femmine, rispettivamente: 3.64%, 7.49%, 26.47%[2].
Popolazioni di 10^5 elementi.
Il passaggio a suo tempo è stato più oneroso.

[2] $\mathcal{N}(\mu = 92.23, \sigma = 8.12)$

Reversibilità 1/4: indipendenza

Rendita vitalizia su una testa X (x anni), con reversibilità β su una testa Y (y anni).
La rendita si calcola tradizionalmente con ipotesi di indipendenza:

$$a^{XY} = \sum_h v^h \cdot \left(\frac{\ell^X_{x+h}}{\ell^X_x} + \beta \cdot \frac{\ell^Y_{y+h}}{\ell^Y_y} - \beta \cdot \frac{\ell^X_{x+h}}{\ell^X_x} \cdot \frac{\ell^Y_{y+h}}{\ell^Y_y} \right).$$

Il prodotto rappresenta l'intersenzione di eventi indipendenti e può essere inteso come una distribuzione bivariata $F^{\perp}$.

Reversibilità 2/4: copule

La probabilità congiunta si può generalizzare al caso di dipendenza. L'intersenzione degli eventi diventa

$$\frac{\mathbb{P}(X > x+h, Y > y+h)}{\mathbb{P}(X > x, Y > y)} = \frac{F(x+h, y+h)}{F(x,y)},$$

dove F è una distribuzione bivariata con marginali date dalle funzioni di sopravvivenza H_X e H_Y di X e Y.
Ogni scelta di F determina un valore diverso di a^{XY}.

Reversibilità 3/4: teorema di Fréchet

Per tutte le distribuzioni congiunte F coerenti con le distribuzioni di X e Y e per tutte le età x e y vale che

$$F^{-}(x,y) \leq F^{\perp}(x,y) \leq F^{+}(x,y),$$

dove

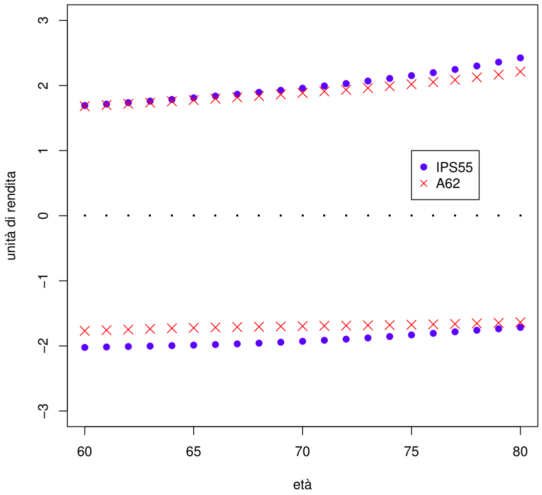
$$F^{-}(x,y) = \max(H_X(x) + H_Y(y) - 1, 0)$$

rappresenta la massima dipendenza inversa teorica e

$$F^{+}(x,y) = \min(H_X(x), H_Y(y))$$

rappresenta la massima dipendenza diretta.
Usando F^{-} ed F^{+} si determinano valori minimi e massimi teorici per una rendita reversibile, rispettivamente a^{-} e a^{+}.

Reversibilità 4/4: rendita su due teste



a^- e a^+ traslate di a^{XY}; prima testa M, seconda testa F di 3 anni più giovane, $\beta = 100\%$, tasso tecnico 0.01.

Conclusioni

Abbiamo visto tre possibili confronti tra basi: momenti, impatto sulla longevità e massima e minima dipendenza.
Ogni confronto guarda aspetti diversi ed è di diverso impiego e interpretazione.
Gli strumenti sono da intendersi come proposte personali in spirito di condivisione e come spunto di riflessione e dialogo.