



ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Struttura di dipendenza dei rischi assicurativi e i limiti alla diversificazione

Paolo Neri Umberto Cherubini¹

¹Università di Bologna
Facoltà di Economia, Management e Statistica

XI Congresso Nazionale degli Attuari
Bologna, 16/06/2016

Il tema: code grasse in un paniere solo

- Se assicuriamo per un certo ammontare due rischi, piuttosto che in un rischio solo, la probabilità di perdita del capitale diminuisce ?
- Se assicuriamo due rischi anziché uno, per mantenere la stessa probabilità di perdita dobbiamo accantonare meno capitale ?
- Se i rischi hanno code particolarmente spesse, così da non garantire l'esistenza della varianza, o addirittura della media, la risposta a queste domande non è scontata.
- E' il problema della non sub-additività del Value-at-Risk, cioè dei quantili della distribuzione di perdita.
- Applicazioni ? Rischi catastrofici. C'è un vasto dibattito sulla possibilità di assicurazione (privata) di portafogli di rischi catastrofici, e di comporre portafogli di riassicurazione.

L'importanza della dipendenza

Domande

- Come influisce la dipendenza sul grado di super-additività?
- Come influisce la dipendenza nelle code sul grado di super-additività?

Intuizioni

- Sappiamo che in caso di perfetta dipendenza il Value-at-Risk di un portafoglio è uguale al portafoglio di Value-at-Risk (additività)
- Sappiamo che in caso di dipendenza parziale il Value-at-Risk può essere super-additivo
- Quindi in certi casi la relazione tra dipendenza e grado di super-additività (VaR della somma su somma dei VaR) è non monotona
- La dipendenza nelle code dovrebbe aumentare il grado di super-additività

Struttura di dipendenza nelle distribuzioni heavy tailed

Obiettivo

Data due distribuzioni X, Y **heavy tailed**

valutare quale sia il comportamento del rischio nella diversificazione, considerando la somma $(X+Y)$ in funzione della struttura di dipendenza

Considerazioni iniziali

- Il rischio nella diversificazione con marginali thin tailed (es. Gaussiana) cresce in modo monotono rispetto alla struttura di dipendenza
- Valutazione della diversificazione nella dipendenza di due v.a. X, Y . È noto il caso di comonotonicity (Embrechts et al., 2003)

$$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$$

- Distribuzione multivariata α -stabili i.i.d. (es. Lévy, Cauchy) diversificazione non diminuisce il rischio (Ibragimov and Walden, 2007), (Ibragimov, 2009), (Ibragimov et al., 2011)

Struttura di dipendenza nelle distribuzioni heavy tailed

Obiettivo

Data due distribuzioni X, Y **heavy tailed**

valutare quale sia il comportamento del rischio nella diversificazione, considerando la somma $(X+Y)$ in funzione della struttura di dipendenza

Considerazioni iniziali

- Il rischio nella diversificazione con marginali thin tailed (es. Gaussiana) cresce in modo monotono rispetto alla struttura di dipendenza
- Valutazione della diversificazione nella dipendenza di due v.a. X, Y
E' noto il caso di **comonotonicity** (Embrechts et al., 2003)

$$VaR(X + Y) = VaR(X) + VaR(Y)$$

- Distribuzione multivariata α -stabili i.i.d. (es. Lévy, Cauchy)
diversificazione non diminuisce il rischio (Ibragimov and Walden, 2007), (Ibragimov, 2009), (Ibragimov et al., 2011)

Struttura di dipendenza nelle distribuzioni heavy tailed

Strumenti per determinare la diversificazione

- Distribuzioni α -stabili
- Funzioni di Copula
- Value-at-Risk

Distribuzioni α -stabili

- Utilizzo delle distribuzioni α -stabili come modello per il rischio catastrofe (Ibragimov et al., 2009)
- comprendono classiche distribuzioni heavy tailed come Lévy, Cauchy
- famiglia di distribuzione chiuse rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare

Struttura di dipendenza nelle distribuzioni heavy tailed

Strumenti per determinare la diversificazione

- Distribuzioni α -stabili
- Funzioni di Copula
- Value-at-Risk

Funzioni di Copula

- Determina la distribuzione congiunta come funzione della trasformata sulle marginali
- Differenti funzioni di copula determinano strutture di dipendenza diverse (simmetria, dipendenza di coda superiore e inferiore)
- Utilizzato per estrarre una struttura di dipendenza tra le v.a.

Struttura di dipendenza nelle distribuzioni heavy tailed

Strumenti per determinare la diversificazione

- Distribuzioni α -stabili
- Funzioni di Copula
- Value-at-Risk

Value-at-Risk

- VaR è una misura di rischio non coerente (Artzner et al., 1999)
Caratterizzato da *non subadditività*

$$\exists X, Y : VaR(X) + VaR(Y) < VaR(X + Y)$$

- VaR è una misura che non utilizza i momenti della distribuzione

$$VaR_{\alpha}(X) = F^{-1}(\alpha)(X) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(X) \geq \alpha\}$$

α -stabili: classe di distribuzione per rischi catastrofici

La famiglia di distribuzioni α -stabili $\mathcal{S}(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ è definita sui 4 parametri

- α : profondità della coda, $0 < \alpha \leq 2$
- β : skewness (asimmetria), $-1 \leq \beta \leq 1$
- γ : dispersione della distribuzione, $\gamma \in [0, +\infty]$
- δ : locazione della distribuzione, $\delta \in [-\infty, +\infty]$

La funzione di distribuzione delle α -stabili non ha una forma chiusa.

Viene definita attraverso la *funzione caratteristica* $\varphi_X(t)$

$$\mathbb{E}[\varphi_X(t)] = \mathbb{E}[e^{itX}] = \begin{cases} \exp\{i\delta t - \gamma^\alpha |t|^\alpha (1 - i\beta \text{sign}(t) \tan(\pi\alpha/2))\}, & \alpha \neq 1 \\ \exp\{i\delta t - \gamma |t| (1 + i\beta \text{sign}(t) \frac{2}{\pi} \ln |t|)\}, & \alpha = 1 \end{cases}$$

Appartengono a questa famiglia le distribuzioni

- Lévy = $\mathcal{S}(\frac{1}{2}, 1, 1, 0)$
- Cauchy = $\mathcal{S}(1, 0, 1, 0)$
- Gaussiana = $\mathcal{S}(2, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$

α -stabili: classe di distribuzione per rischi catastrofici

La famiglia di distribuzioni α -stabili $\mathcal{S}(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ è definita sui 4 parametri

- α : profondità della coda, $0 < \alpha \leq 2$
- β : skewness (asimmetria), $-1 \leq \beta \leq 1$
- γ : dispersione della distribuzione, $\gamma \in [0, +\infty]$
- δ : locazione della distribuzione, $\delta \in [-\infty, +\infty]$

La funzione di distribuzione delle α -stabili non ha una forma chiusa.

Viene definita attraverso la *funzione caratteristica* $\varphi_X(t)$

$$\mathbb{E}[\varphi_X(t)] = \mathbb{E}[e^{itX}] = \begin{cases} \exp\{i\delta t - \gamma^\alpha |t|^\alpha (1 - i\beta \text{sign}(t) \tan(\pi\alpha/2))\}, & \alpha \neq 1 \\ \exp\{i\delta t - \gamma |t| (1 + i\beta \text{sign}(t) \frac{2}{\pi} \ln |t|)\}, & \alpha = 1 \end{cases}$$

Appartengono a questa famiglia le distribuzioni

- Lévy = $\mathcal{S}(\frac{1}{2}, 1, 1, 0)$
- Cauchy = $\mathcal{S}(1, 0, 1, 0)$
- Gaussiana = $\mathcal{S}(2, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$

α -stabili: classe di distribuzione per rischi catastrofici

La famiglia di distribuzioni α -stabili $\mathcal{S}(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ è definita sui 4 parametri

- α : profondità della coda, $0 < \alpha \leq 2$
- β : skewness (asimmetria), $-1 \leq \beta \leq 1$
- γ : dispersione della distribuzione, $\gamma \in [0, +\infty]$
- δ : locazione della distribuzione, $\delta \in [-\infty, +\infty]$

La funzione di distribuzione delle α -stabili non ha una forma chiusa.

Viene definita attraverso la *funzione caratteristica* $\varphi_X(t)$

$$\mathbb{E}[\varphi_X(t)] = \mathbb{E}[e^{itX}] = \begin{cases} \exp\{i\delta t - \gamma^\alpha |t|^\alpha (1 - i\beta \text{sign}(t) \tan(\pi\alpha/2))\}, & \alpha \neq 1 \\ \exp\{i\delta t - \gamma |t| (1 + i\beta \text{sign}(t) \frac{2}{\pi} \ln |t|)\}, & \alpha = 1 \end{cases}$$

Appartengono a questa famiglia le distribuzioni

- Lévy = $\mathcal{S}(\frac{1}{2}, 1, 1, 0)$
- Cauchy = $\mathcal{S}(1, 0, 1, 0)$
- Gaussiana = $\mathcal{S}(2, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$

α -stabili: principali proprietà

Principali proprietà della famiglia delle α -stabili $\mathcal{S}(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$

a) Siano $X_1 \in \mathcal{S}(\alpha, \beta_1, \gamma_1, \delta_1)$ e $X_2 \in \mathcal{S}(\alpha, \beta_2, \gamma_2, \delta_2)$ v.a. indipendenti. Allora la somma $X_1 + X_2 \sim \mathcal{S}(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, dove

$$\beta = \frac{\beta_1 \gamma_1^\alpha + \beta_2 \gamma_2^\alpha}{\gamma_1^\alpha + \gamma_2^\alpha}, \quad \gamma = (\gamma_1^\alpha + \gamma_2^\alpha)^{1/\alpha}, \quad \delta = \delta_1 + \delta_2$$

b) Per ogni valore di $0 < \alpha \leq 2$, si ha

$$X \sim \mathcal{S}(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \Leftrightarrow -X \sim \mathcal{S}(\alpha, -\beta, \gamma, \delta)$$

ovvero simmetria rispetto alla locazione della distribuzione

c) Un importante risultato riguarda i momenti di ordine p di una v.a. α -stabile. Sia $X \sim \mathcal{S}(\alpha, \beta, \gamma, 0)$, con $0 < \alpha < 2$. Allora

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|X|^p &< \infty, & \forall 0 < p < \alpha \\ \mathbb{E}|X|^p &= \infty, & \forall p \geq \alpha \end{aligned}$$

Da cui segue che la famiglia delle α -stabili non ammette momento secondo finito per $\alpha < 2$ e perciò la varianza non è definita.

Inoltre, si preclude anche l'esistenza del valore atteso, per $\alpha \leq 1$.

α -stabili: principali proprietà

Principali proprietà della famiglia delle α -stabili $\mathcal{S}(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$

a) Siano $X_1 \in \mathcal{S}(\alpha, \beta_1, \gamma_1, \delta_1)$ e $X_2 \in \mathcal{S}(\alpha, \beta_2, \gamma_2, \delta_2)$ v.a. indipendenti. Allora la somma $X_1 + X_2 \sim \mathcal{S}(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, dove

$$\beta = \frac{\beta_1 \gamma_1^\alpha + \beta_2 \gamma_2^\alpha}{\gamma_1^\alpha + \gamma_2^\alpha}, \quad \gamma = (\gamma_1^\alpha + \gamma_2^\alpha)^{1/\alpha}, \quad \delta = \delta_1 + \delta_2$$

b) Per ogni valore di $0 < \alpha \leq 2$, si ha

$$X \sim \mathcal{S}(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \Leftrightarrow -X \sim \mathcal{S}(\alpha, -\beta, \gamma, \delta)$$

ovvero simmetria rispetto alla locazione della distribuzione

c) Un importante risultato riguarda i momenti di ordine p di una v.a. α -stabile. Sia $X \sim \mathcal{S}(\alpha, \beta, \gamma, 0)$, con $0 < \alpha < 2$. Allora

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|X|^p &< \infty, & \forall 0 < p < \alpha \\ \mathbb{E}|X|^p &= \infty, & \forall p \geq \alpha \end{aligned}$$

Da cui segue che la famiglia delle α -stabili non ammette momento secondo finito per $\alpha < 2$ e perciò la varianza non è definita.

Inoltre, si preclude anche l'esistenza del valore atteso, per $\alpha \leq 1$.

α -stabili: principali proprietà

Principali proprietà della famiglia delle α -stabili $\mathcal{S}(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$

a) Siano $X_1 \in \mathcal{S}(\alpha, \beta_1, \gamma_1, \delta_1)$ e $X_2 \in \mathcal{S}(\alpha, \beta_2, \gamma_2, \delta_2)$ v.a. indipendenti. Allora la somma $X_1 + X_2 \sim \mathcal{S}(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, dove

$$\beta = \frac{\beta_1 \gamma_1^\alpha + \beta_2 \gamma_2^\alpha}{\gamma_1^\alpha + \gamma_2^\alpha}, \quad \gamma = (\gamma_1^\alpha + \gamma_2^\alpha)^{1/\alpha}, \quad \delta = \delta_1 + \delta_2$$

b) Per ogni valore di $0 < \alpha \leq 2$, si ha

$$X \sim \mathcal{S}(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \Leftrightarrow -X \sim \mathcal{S}(\alpha, -\beta, \gamma, \delta)$$

ovvero simmetria rispetto alla locazione della distribuzione

c) Un importante risultato riguarda i momenti di ordine p di una v.a. α -stabile. Sia $X \sim \mathcal{S}(\alpha, \beta, \gamma, 0)$, con $0 < \alpha < 2$. Allora

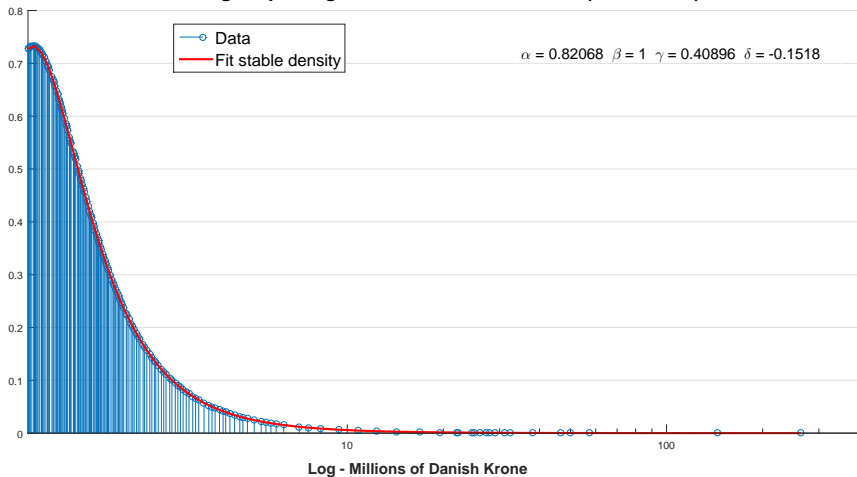
$$\begin{aligned} \mathbb{E}|X|^p &< \infty, & \forall 0 < p < \alpha \\ \mathbb{E}|X|^p &= \infty, & \forall p \geq \alpha \end{aligned}$$

Da cui segue che la famiglia delle α -stabili non ammette momento secondo finito per $\alpha < 2$ e perciò la varianza non è definita.

Inoltre, si preclude anche l'esistenza del valore atteso per $\alpha \leq 1$.

α -stabili: un esempio di fitting sui dati

Fitting Copenhagen Reinsurance fire losses (1980 - 1990)



Funzioni di Copula

Definizione (Copula)

una *copula* bi-dimensionale è una funzione C a valori reali, definita sul dominio $DomC = [0, 1] \times [0, 1] = I^2$, con le seguenti proprietà

1 $\forall u, v \in I,$

$$C(u, 0) = C(0, v) = 0 \quad C(u, 1) = u \quad C(1, v) = v$$

2 $\forall u_1, u_2, v_1, v_2 \in I$ tale che $u_1 \leq u_2$ e $v_1 \leq v_2$

$$C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) + C(u_1, v_1) \geq 0$$

Teorema (Sklar, 1959)

Sia H la funzione di distribuzione congiunta relativa alle marginali F e G . Allora esiste una copula C tale che per ogni $x, y \in \bar{\mathbb{R}}$

$$H(x, y) = C(F(x), G(y))$$

Le funzioni di copula permettono di specificare la struttura di dipendenza in maniera separata dalle distribuzioni marginali.

Funzioni di Copula

Definizione (Copula)

una *copula* bi-dimensionale è una funzione C a valori reali, definita sul dominio $DomC = [0, 1] \times [0, 1] = I^2$, con le seguenti proprietà

1 $\forall u, v \in I,$

$$C(u, 0) = C(0, v) = 0 \quad C(u, 1) = u \quad C(1, v) = v$$

2 $\forall u_1, u_2, v_1, v_2 \in I$ tale che $u_1 \leq u_2$ e $v_1 \leq v_2$

$$C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) + C(u_1, v_1) \geq 0$$

Teorema (Sklar, 1959)

Sia H la funzione di distribuzione congiunta relativa alle marginali F e G . Allora esiste una copula C tale che per ogni $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$

$$H(x, y) = C(F(x), G(y))$$

Le funzioni di copula permettono di specificare la struttura di dipendenza in maniera separata dalle distribuzioni marginali.

Valutazione del portafoglio con struttura di dipendenza

1 Valutazione di $X + Y$ con dipendenza di copula

Date due v.a. i.d. $X, Y \sim \mathcal{S}(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, $F_X \sim F_Y$, si deve determinare il $VaR_q(X + Y)$, su tutta la struttura di dipendenza $\tau \in [-1, 1]$

- utilizzo delle funzioni di copula $C(u, v)$ per associare la struttura di dipendenza tra le v.a. α -stabili X, Y
- calcolo della distribuzione della somma F_{X+Y}
- quantile di ordine q , $VaR_q(X + Y) = -F_{X+Y}^{-1}(q)$

2 Rapporto di subadditività

Date le distribuzioni i.d. $X, Y \sim \mathcal{S}(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$

Si definisce il *Rapporto di subadditività* al livello di confidenza q

$$RS_q = \frac{VaR_q(X + Y)}{VaR_q(X) + VaR_q(Y)} \quad \begin{cases} RS_q \geq 1, & \text{non subadditività} \\ RS_q < 1, & \text{subadditività} \end{cases}$$

Valutazione del portafoglio con struttura di dipendenza

1 Valutazione di $X + Y$ con dipendenza di copula

Date due v.a. i.d. $X, Y \sim \mathcal{S}(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, $F_X \sim F_Y$, si deve determinare il $VaR_q(X + Y)$, su tutta la struttura di dipendenza $\tau \in [-1, 1]$

- utilizzo delle funzioni di copula $C(u, v)$ per associare la struttura di dipendenza tra le v.a. α -stabili X, Y
- calcolo della distribuzione della somma F_{X+Y}
- quantile di ordine q , $VaR_q(X + Y) = -F_{X+Y}^{-1}(q)$

2 Rapporto di subadditività

Date le distribuzioni i.d. $X, Y \sim \mathcal{S}(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$

Si definisce il *Rapporto di subadditività* al livello di confidenza q

$$RS_q = \frac{VaR_q(X + Y)}{VaR_q(X) + VaR_q(Y)} \quad \begin{cases} RS_q \geq 1, & \text{non subadditività} \\ RS_q < 1, & \text{subadditività} \end{cases}$$

Metodi di calcolo della distribuzione

Sono stati implementati due metodi di calcolo

- 1 Simulazione MonteCarlo della v.a. $W = X + Y$
 - Calcolo della distribuzione. Generazione di N realizzazioni (N grande, $\sim 10^7$) delle v.a. α -stabili X, Y legate da una copula C_θ che ne definisce la dipendenza
 $W = F_X^{-1}(u) + F_Y^{-1}(v) \quad u, v \sim Unif(0, 1)$
- 2 C-Convolutione delle v.a. $X, Y \Rightarrow W = X + Y$ sulla copula C_θ (Cherubini et al., 2011)

$$F_X \overset{C}{*} F_Y(t) = \int_0^1 \frac{d}{d\omega} C\left(\omega, F_Y(t - F_X^{-1}(\omega))\right) d\omega$$

- Calcolo della distribuzione. Risoluzione numerica dell'integrale su ogni punto $t \in Dom(W)$

Metodi di calcolo della distribuzione

Sono stati implementati due metodi di calcolo

① Simulazione MonteCarlo della v.a. $W = X + Y$

- Calcolo della distribuzione. Generazione di N realizzazioni (N grande, $\sim 10^7$) delle v.a. α -stabili X, Y legate da una copula C_θ che ne definisce la dipendenza

$$W = F_X^{-1}(u) + F_Y^{-1}(v) \quad u, v \sim Unif(0, 1)$$

② C-Convolution delle v.a. $X, Y \Rightarrow W = X + Y$ sulla copula C_θ (Cherubini et al., 2011)

$$F_X \overset{C}{*} F_Y(t) = \int_0^1 \frac{d}{d\omega} C\left(\omega, F_Y(t - F_X^{-1}(\omega))\right) d\omega$$

- Calcolo della distribuzione. Risoluzione numerica dell'integrale su ogni punto $t \in Dom(W)$

Metodi di calcolo della distribuzione

Sono stati implementati due metodi di calcolo

- 1 Simulazione MonteCarlo della v.a. $W = X + Y$
 - Calcolo della distribuzione. Generazione di N realizzazioni (N grande, $\sim 10^7$) delle v.a. α -stabili X, Y legate da una copula C_θ che ne definisce la dipendenza
$$W = F_X^{-1}(u) + F_Y^{-1}(v) \quad u, v \sim Unif(0, 1)$$
- 2 C-Convolverzione delle v.a. $X, Y \Rightarrow W = X + Y$ sulla copula C_θ (Cherubini et al., 2011)

$$F_X \overset{C}{*} F_Y(t) = \int_0^1 \frac{d}{d\omega} C\left(\omega, F_Y(t - F_X^{-1}(\omega))\right) d\omega$$

- Calcolo della distribuzione. Risoluzione numerica dell'integrale su ogni punto $t \in Dom(W)$

Struttura del rischio: Copule Ellittiche

Consideriamo in seguito due funzioni di Copula ellittiche per determinare la struttura del rischio in rapporto alla dipendenza del portafoglio

- **Gaussian copula**

$$C(u_1, u_2, \dots, u_n) = \phi^n \left(\phi^{-1}(u_1), \phi^{-1}(u_2), \dots, \phi^{-1}(u_n), \rho \right)$$

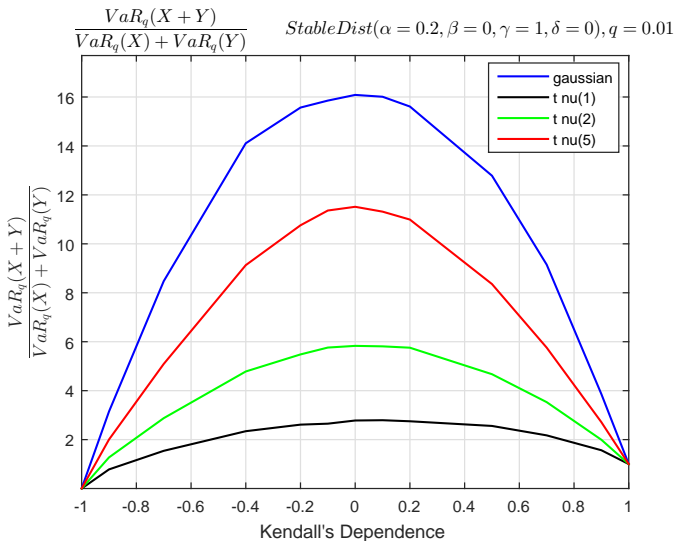
- **Student-t copula**

$$C(u_1, u_2, \dots, u_n) = t_\nu^n \left(t_{\nu_1}^{-1}(u_1), t_{\nu_2}^{-1}(u_2), \dots, t_{\nu_n}^{-1}(u_n), \rho \right)$$

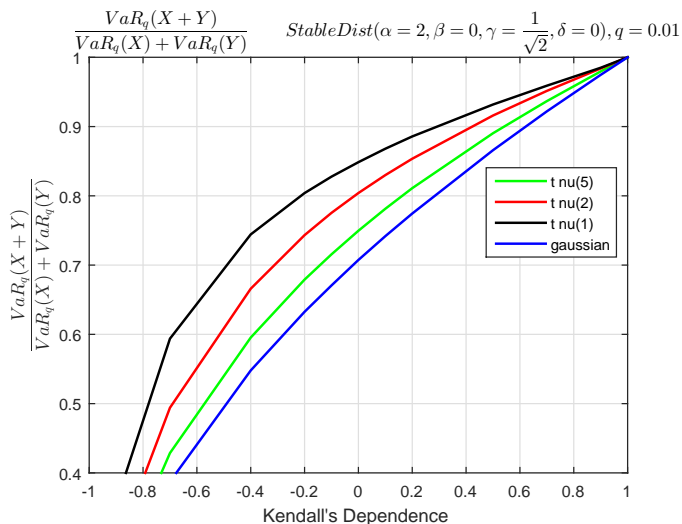
Diversamente dalla copula Gaussiana, per la Student-t copula è presente anche il coefficiente dipendenza di coda

$$\lambda_U = \lambda_L = 2t_{\nu+1} \left(\sqrt{\nu+1} \frac{\sqrt{1-\rho}}{\sqrt{1+\rho}} \right)$$

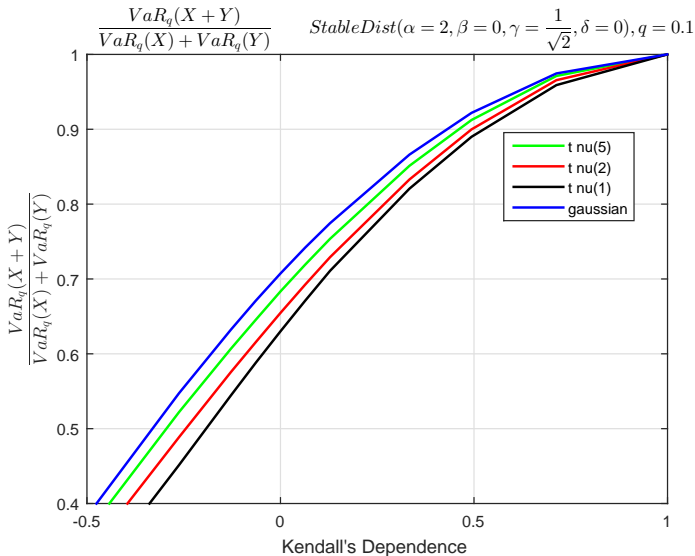
Risultati



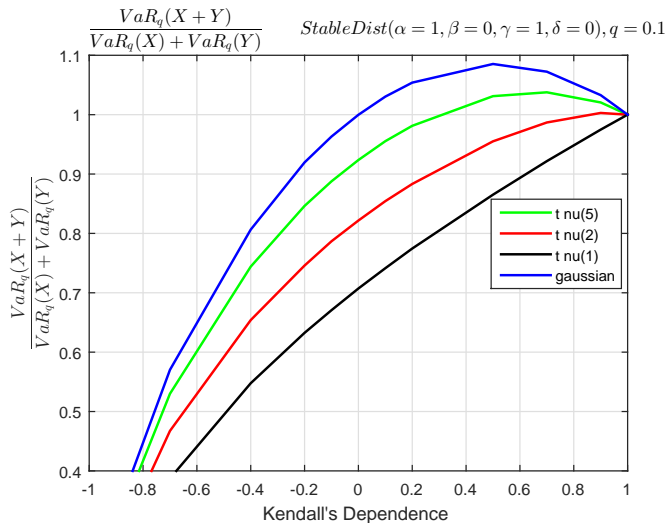
Risultati



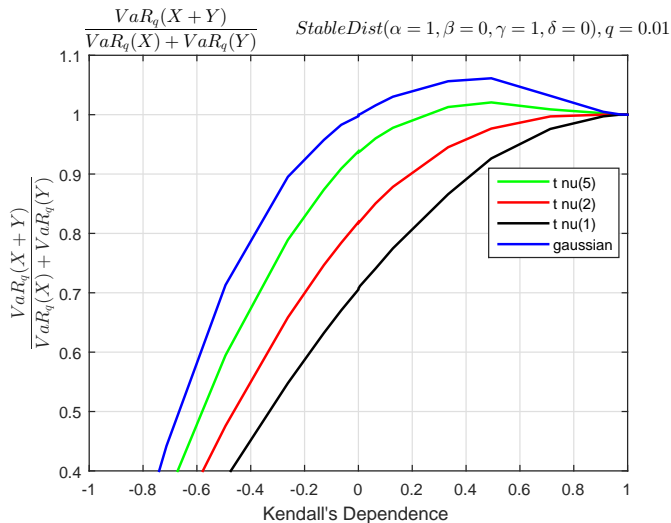
Risultati



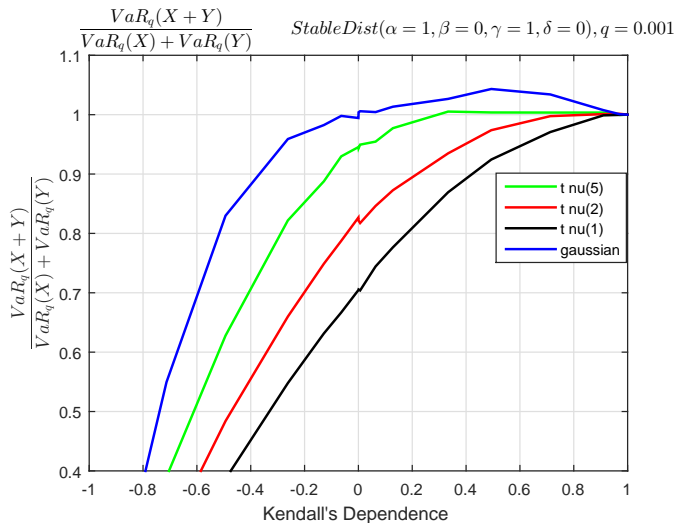
Risultati



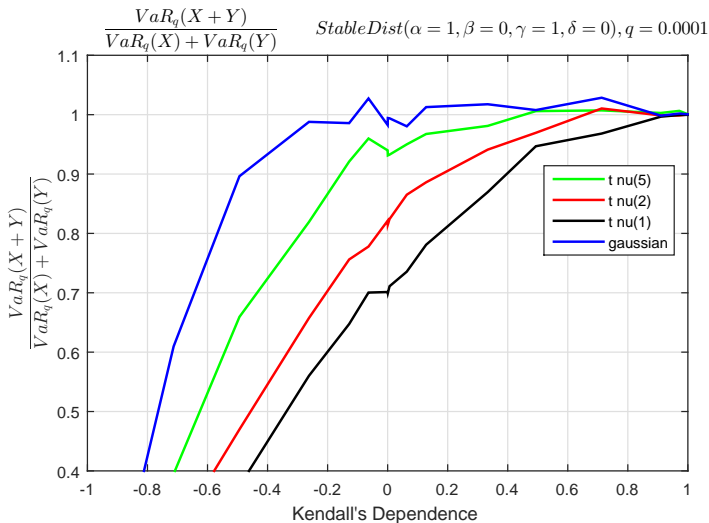
Risultati



Risultati



Risultati



Conclusioni

- La presenza di code grasse rende problematica l'aggregazione dei rischi, perché il capitale economico necessario a garantirli può aumentare in maniera esclusiva.
- Per rischi α -stabili identicamente distribuiti la relazione tra grado di dipendenza dei rischi e grado di super-additività è non monotono per valori di $\alpha \leq 1$.
- La presenza di dipendenza nelle code modera, anziché accentuare, il problema di super-additività per i livelli di probabilità tipicamente considerati.
- Problemi aperti.
 - Rischi non identicamente distribuiti: può una coda grassa «infettare» un portafoglio?
 - Strutture di dipendenza non standard: ad esempio, qual è l'impatto di «singolarità» nella struttura di dipendenza, cioè casi in cui eventi congiunti si possono verificare simultaneamente con probabilità positiva?

- Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.-M., and Heath, D. (1999). Coherent measures of risk. *Mathematical finance*, 9(3):203–228.
- Cherubini, U., Mulinacci, S., Gobbi, F., and Romagnoli, S. (2011). *Dynamic Copula methods in finance*, volume 625. John Wiley & Sons.
- Embrechts, P., Höing, A., and Juri, A. (2003). Using copulae to bound the value-at-risk for functions of dependent risks. *Finance and Stochastics*, 7(2):145–167.
- Ibragimov, R. (2009). Portfolio diversification and value at risk under thick-tailedness†. *Quantitative Finance*, 9(5):565–580.
- Ibragimov, R., Jaffee, D., and Walden, J. (2011). Diversification disasters. *Journal of financial economics*, 99(2):333–348.
- Ibragimov, R., Jaffee, D., Walden, J., et al. (2009). Nondiversification traps in catastrophe insurance markets. *Review of Financial Studies*, 22(3):959–993.
- Ibragimov, R. and Walden, J. (2007). The limits of diversification when losses may be large. *Journal of Banking & Finance*, 31(8):2551–2569.
- Nelsen, R. B. (2007). *An introduction to copulas*. Springer Science.
- Neri, P. (2016). Fat tails and limits of diversification: the case of dependent risks. Master's thesis, Università di Bologna, Facoltà di Economia, Management e Statistica, CdL Magistrale in Scienze Statistiche, Finanziarie ed Attuariali.
- Nolan, J. P. (1997). Numerical calculation of stable densities and distribution functions. *Communications in statistics. Stochastic models*, 13(4):759–774.