

XII

CONGRESSO NAZIONALE degli ATTUARI

Modelli per i tassi di interesse

Calibrazione e validazione in ambito Solvency II

Angelo Troiani, PhD, ONA

22/11/2018



Agenda

- 1 Introduzione
- 2 Il modello di Vasicek bi-fattoriale
- 3 Il filtro di Kalman
- 4 Calibrazione su dati storici
- 5 Analisi della funzione di verosimiglianza
- 6 Analisi di estrapolazione
- 7 Framework di validazione
- 8 Conclusioni



Introduzione

- ▶ La crisi finanziaria del 2007 ha profondamente cambiato le dinamiche dei mercati e il comportamento dei tassi di interesse nominali.
→ **necessità di modelli che si adattino al nuovo contesto macroeconomico (ad es. considerando anche tassi negativi)**
- ▶ Nuove leggi in materia di solvibilità degli istituti finanziari hanno recentemente stimolato la ricerca nel campo della finanza matematica. Ad esempio Solvency II prevede che il SCR sia costituito come il VaR dei fondi propri delle imprese ad un livello di probabilità di 99.5 percento, su un orizzonte temporale di un anno.
→ **definizione di un modello interno che rappresenti il profilo di rischio dell'impresa.**
- ▶ Il calcolo del VaR implica la necessità di determinare la distribuzione di probabilità prospettica dei fondi propri delle imprese secondo la misura di probabilità naturale.
→ **calibrazione dei modelli su base storica per determinare i parametri reali delle dinamiche stocastiche che governano le sorgenti di incertezza (stima del premio per il rischio).**

Modelli per i tassi di interesse: Calibrazione e validazione

- ▶ Proposta di tecnica di calibrazione per un **two-factor Vasicek model** per i tassi di interesse nominali.
- ▶ Stima dei **parametri Real world e risk neutral** effettuata attraverso lo **stimatore di massima verosimiglianza** applicando il **Kalman filter**.
- ▶ La tecnica di calibrazione prevede l'utilizzo di **sequenze quasi-random di Sobol** per la definizione dei parametri iniziali dell'algoritmo di calibrazione.
- ▶ **Validazione** del modello.



Il modello di Vasicek bifattoriale

- ▶ Per introdurre il modello, consideriamo il prezzo $P(t, T)$ al tempo t di uno zero coupon bond con scadenza in $T > t$. Il prezzo del bond è generalmente formalizzato come segue:

$$P(t, T) = E^{\mathbb{Q}} \left[\exp \left(- \int_t^T r(u) du \right) \middle| F_t \right]. \quad (1)$$

- ▶ Nel modello di Vasicek bi-fattoriale, la dinamica dello short rate r è descritta dal seguente sistema:

$$\begin{aligned} r(t) &= x_1(t) + x_2(t). \\ dx_1(t) &= k_1(\theta_1 - x_1(t))dt + \sigma_1 dZ_1(t), \\ dx_2(t) &= k_2(\theta_2 - x_2(t))dt + \sigma_2 dZ_2(t), \\ dZ_1(t)dZ_2(t) &= \rho dt. \end{aligned} \quad (2)$$

- ▶ La **distribuzione di probabilità condizionata dello short rate** è una distribuzione normale bi-variata, in cui la media e la varianza condizionate sono espresse dalle seguenti espressioni:

$$\begin{aligned} E_t[r(T)] &= E_t[x_1(T)] + E_t[x_2(T)] \\ &= \theta_1(1 - e^{-k_1(T-t)}) + e^{-k_1(T-t)}x_1(t) + \theta_2(1 - e^{-k_2(T-t)}) + e^{-k_2(T-t)}x_2(t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Var}_t[r(T)] &= \text{Var}_t[x_1(T)] + \text{Var}_t[x_2(T)] + 2\text{Cov}_t[x_1(T), x_2(T)] \\ &= \frac{\sigma_1^2}{2k_1}(1 - e^{-2k_1(T-t)}) + \frac{\sigma_2^2}{2k_2}(1 - e^{-2k_2(T-t)}) + \\ &\quad + 2\frac{\rho\sigma_1\sigma_2}{k_1 + k_2}(1 - e^{-(k_1+k_2)(T-t)}). \end{aligned}$$



Il modello di Vasicek bifattoriale

- ▶ Definiamo il **premio per il rischio** $\Lambda(t)$ come un vettore composto dalle seguenti 2 componenti:

$$\begin{aligned}\Lambda_1(t) &= \lambda_{11} + \lambda_{12}x_1(t), \\ \Lambda_2(t) &= \lambda_{21} + \lambda_{22}x_2(t).\end{aligned}$$

- ▶ Sulla base della classificazione proposta da Duffee [2002], il modello specificato precedentemente è un **modello essenzialmente affine**. Questa classe di modelli è una generalizzazione dei **modelli completamente affini** (ad es. il modello di Vasicek univariato e il modello CIR) e risulta essere maggiormente flessibile nella stima del premio per il rischio.
- ▶ Nel caso della **misura di probabilità risk neutral** \mathbb{Q} i parametri sono derivati come segue:

$$\begin{aligned}\hat{k}_j &= k_j + \sigma_j \lambda_{j2}, \\ \hat{\theta}_j &= \frac{k_j \theta_j - \sigma_j \lambda_{j1}}{\hat{k}_j}, \text{ con } j = 1, 2.\end{aligned}$$

La soluzione in forma chiusa

- ▶ Adattando i risultati ottenuti da Bolder [2001] al modello di Vasicek bi-fattoriale essenzialmente affine, troviamo la seguente **equazione differenziale generale di valutazione**:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \sum_{i=1}^2 \hat{k}_i (\hat{\theta} - x_i) \frac{\partial P}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \frac{\rho \sigma_i \sigma_j}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial x_i \partial x_j} - rP = 0. \quad (3)$$



Il modello di Vasicek bifattoriale

- ▶ Applicando la condizione al contorno $P(T, T) = 1$, l'equazione (3) ammette la seguente soluzione in forma chiusa per il prezzo di uno zero coupon bond:

$$\begin{aligned} P(\tau, x_1, x_2) &= e^{A(\tau) - \sum_{i=1}^2 B_i(\tau)x_i}, \\ B_i(\tau) &= \frac{1}{\hat{k}_i} (1 - e^{-\hat{k}_i \tau}), \\ A(\tau) &= \sum_{i=1}^2 \left(\left(\hat{k}_i^2 \hat{\theta}_i - \frac{\sigma_i^2}{2} \right) \frac{(B_i(\tau) - \tau)}{\hat{k}_i^2} - \frac{\sigma_i^2 B_i^2(\tau)}{4\hat{k}_i} \right) + \\ &\quad + \frac{\rho\sigma_1\sigma_2}{\hat{k}_1\hat{k}_2} \left(\tau - B_1(\tau) - B_2(\tau) + \frac{1}{\hat{k}_1 + \hat{k}_2} (1 - e^{-(\hat{k}_1 + \hat{k}_2)\tau}) \right). \end{aligned} \tag{4}$$

- ▶ Il modello fornisce i seguenti risultati asintotici per la **media e la varianza condizionata** dello short rate $r(t)$ in base alla misura di probabilità naturale:

$$E_t[r(\infty)] = \lim_{T \rightarrow \infty} E_t[r(T)] = \theta_1 + \theta_2$$

$$\text{Var}_t[r(\infty)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \text{Var}_t[r(T)] = \frac{\sigma_1^2}{2k_1} + \frac{\sigma_2^2}{2k_2} + 2 \frac{\rho\sigma_1\sigma_2}{k_1 + k_2}$$

- ▶ Inoltre, è possibile derivare l'espressione per l'**intensità di rendimento a scadenza con scadenza infinita**, sulla base della misura di probabilità neutrale verso il rischio:

$$y_\infty = \lim_{T \rightarrow \infty} y(t, T) = \lim_{T \rightarrow \infty} -\frac{\log P(t, T)}{T - t} = \sum_{i=1}^2 \left(\hat{\theta}_i - \frac{\sigma_i^2}{2\hat{k}_i^2} \right) - \frac{\rho\sigma_1\sigma_2}{\hat{k}_1\hat{k}_2}$$



Il filtro di Kalman

- ▶ La procedura di calibrazione si basa su una **tecnica di filtraggio delle serie storiche** nota come il [Kalman filter](#)

Kalman Filter

- ▶ Si tratta di uno stimatore dello stato istantaneo di un sistema dinamico disturbato da un rumore bianco.
- ▶ La stima si basa sulla misurazione di variabili osservabili che sono linearmente dipendenti dallo stato disturbato dal rumore bianco.
- ▶ L'applicazione del Kalman filter si basa sulle seguenti peculiarità del modello di Vasicek bi-fattoriale:
 - ▶ la relazione affine tra i fattori e le intensità di rendimento
 - ▶ la distribuzione gaussiana delle intensità di rendimento
- ▶ Il Kalman filter è ampiamente usato in letteratura per la stima dei parametri di modelli finanziari.
- ▶ Per l'applicazione del filtro abbiamo bisogno di riscrivere il modello nella sua forma **state space**.
- ▶ Durbin and Koopman [2012] definisce uno **state space gaussian model** come segue:

$$\begin{aligned}y_t &= d_t + Z_t \alpha_t + \epsilon_t, & \epsilon_t &\sim N(0, H_t), \\ \alpha_{t+1} &= c_t + T_t \alpha_t + R_t \eta_t, & \eta_t &\sim N(0, Q_t) \quad t = 1, \dots, n,\end{aligned} \tag{5}$$

- ▶ y_t è il **vettore delle osservazioni**,
- ▶ α_t is the **vettore degli stati**,
- ▶ ϵ_t e η_t sono indipendenti per ogni t ,
- ▶ $\alpha_1 \sim N(a_1, P_1)$, con a_1 e P_1 noti, e indipendenti da $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ e η_1, \dots, η_n .



Il filtro di Kalman

$$\begin{aligned}y_t &= d_t + Z_t \alpha_t + \epsilon_t, \\ \alpha_{t+1} &= c_t + T_t \alpha_t + R_t \eta_t,\end{aligned}$$

- ▶ Il Kalman filter applicato ad uno *state space Gaussian model* è definito dal seguente sistema di formule ricorsive:

$$\begin{aligned}y_t - E[y_t|Y_{t-1}] &= v_t = y_t - Z_t a_t, \\ E[\alpha_t|Y_t] &= a_{t|t} = a_t + P_t Z_t' F_t^{-1} v_t, \\ E[\alpha_{t+1}|Y_t] &= a_{t+1} = T_t a_{t|t} + c_t, \\ \text{Var}[v_t|Y_{t-1}] &= F_t = Z_t P_t Z_t' + H_t, \\ \text{Var}[\alpha_t|Y_t] &= P_{t|t} = P_t - P_t Z_t' F_t^{-1} Z_t P_t, \\ \text{Var}[\alpha_{t+1}|Y_t] &= P_{t+1} = T_t P_{t|t} T_t' + R_t Q_t R_t' .\end{aligned}\tag{6}$$

- ▶ La sequenza definita nell'equazione (6) consente di aggiornare il sistema ogni volta che una nuova osservazione è disponibile.
- ▶ La **log-verosimiglianza** del modello descritto in questa sezione è definita dalla seguente espressione:

$$\log \mathcal{L}(Y_n) = \ell(Y_n) - \frac{np}{2} \log 2\pi - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n (\log |F_t| + v_t' F_t^{-1} v_t).\tag{7}$$



Implementazione del modello

- Il modello di Vasicek Gaussiano bi-fattoriale esplicitato nella sua formulazione *state space* è definito dal seguente sistema di equazioni:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y(t_i, t_i + \tau_1) \\ \vdots \\ y(t_i, t_i + \tau_n) \end{bmatrix}}_{y_{t_i}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{-A(\tau_1)}{\tau_1} \\ \vdots \\ \frac{-A(\tau_n)}{\tau_n} \end{bmatrix}}_d + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{-B_1(\tau_1)}{\tau_1} & \frac{-B_2(\tau_1)}{\tau_1} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{-B_1(\tau_n)}{\tau_n} & \frac{-B_2(\tau_n)}{\tau_n} \end{bmatrix}}_Z \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t_i) \\ x_2(t_i) \end{bmatrix}}_{x_{t_i}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \epsilon_1(t_i) \\ \vdots \\ \epsilon_n(t_i) \end{bmatrix}}_{\epsilon_{t_i}},$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t_i) \\ x_2(t_i) \end{bmatrix}}_{x_{t_i}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \theta_1(1 - e^{-k_1 \Delta t}) \\ \theta_2(1 - e^{-k_2 \Delta t}) \end{bmatrix}}_c + \underbrace{\begin{bmatrix} e^{-k_1 \Delta t} & 0 \\ 0 & e^{-k_2 \Delta t} \end{bmatrix}}_T \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t_{i-1}) \\ x_2(t_{i-1}) \end{bmatrix}}_{x_{t_{i-1}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \eta_1(t_i) \\ \eta_2(t_i) \end{bmatrix}}_{\eta_{t_i}}, \tag{8}$$

- $\Delta t = t_i - t_{i-1}$ con $i = 1, \dots, N$,
- $\epsilon_{t_i} \sim N(0, H)$, con H matrice diagonale $n \times n$ con $H_{ii} = h^2$ per $i = 1, \dots, n$,
- $\eta_{t_i} \sim N(0, Q)$ con:

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_1^2}{2k_1} (1 - e^{-2k_1(T-t)}) & \rho \frac{\sigma_1 \sigma_2}{k_1 + k_2} (1 - e^{-(k_1 + k_2)(T-t)}) \\ \rho \frac{\sigma_1 \sigma_2}{k_1 + k_2} (1 - e^{-(k_1 + k_2)(T-t)}) & \frac{\sigma_2^2}{2k_2} (1 - e^{-2k_2(T-t)}) \end{bmatrix}.$$

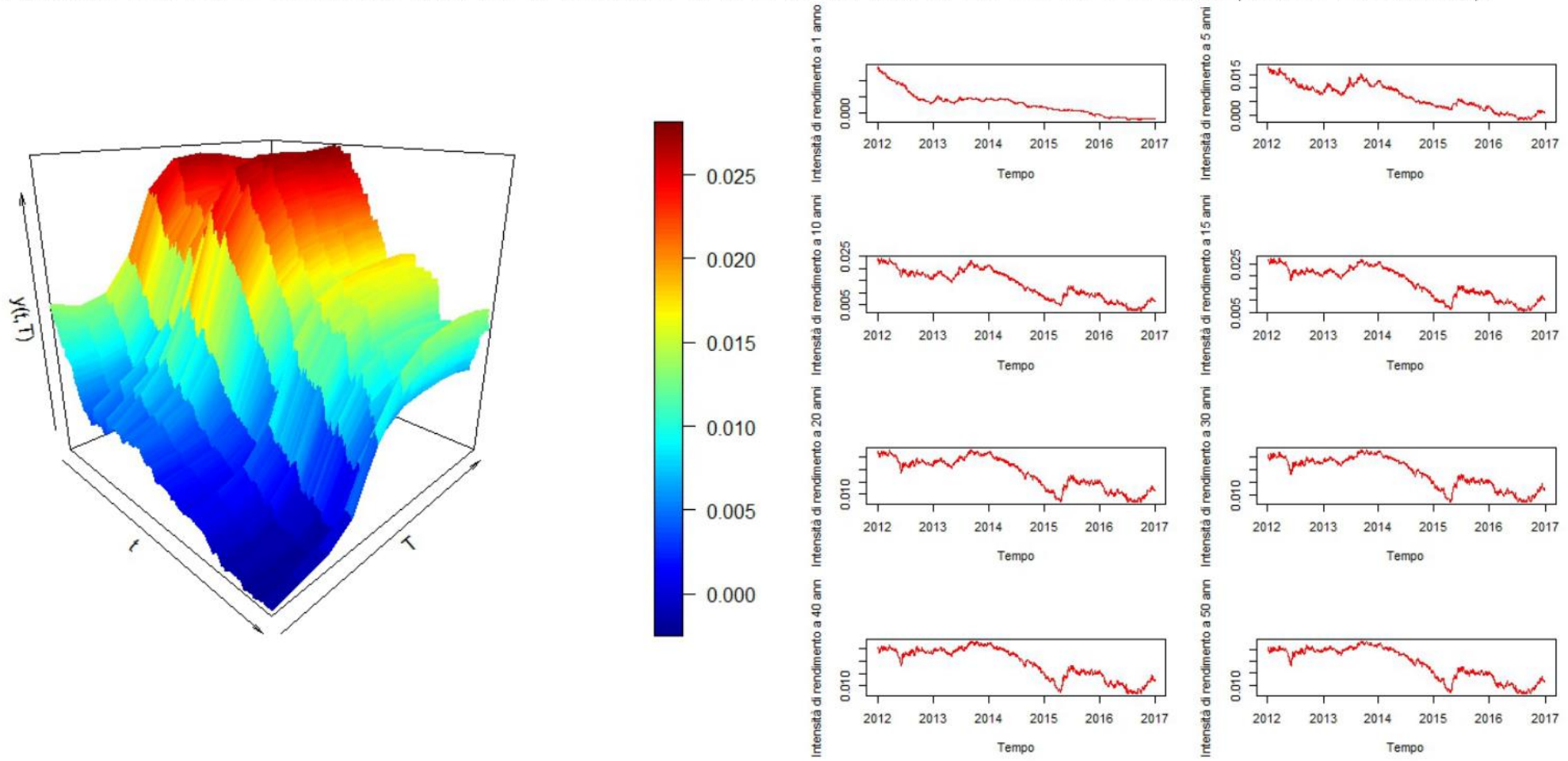
- I parametri del modello sono determinati attraverso la **massimizzazione della log-verosimiglianza del Kalman filter**

$$\hat{\psi} = \operatorname{argmax}_{\psi \in \Psi} \log \mathcal{L}(\psi | Y_n), \tag{9}$$



Calibrazione su dati storici

- ▶ Intensità di rendimento a scadenza determinate a partire dai tassi Euro Swap (gamba fissa 1 anno, variabile 6 mesi) osservati su base giornaliera dal 1 gennaio 2012 al 31 dicembre 2016, per le scadenze 1, 2, 3, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 40 e 50 anni (Fonte: *Bloomberg*).



Calibrazione su dati storici

La procedura applicata per la calibrazione del modello:

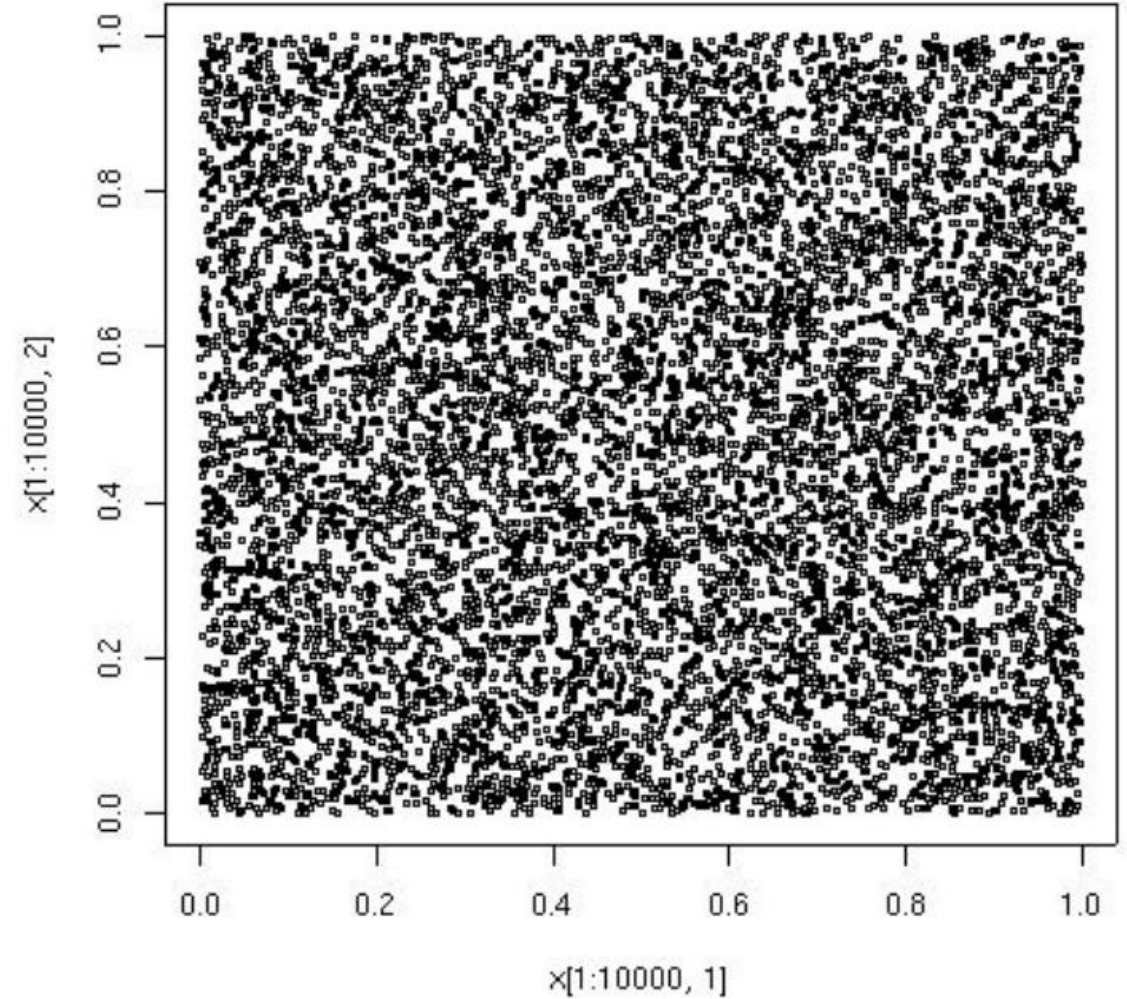
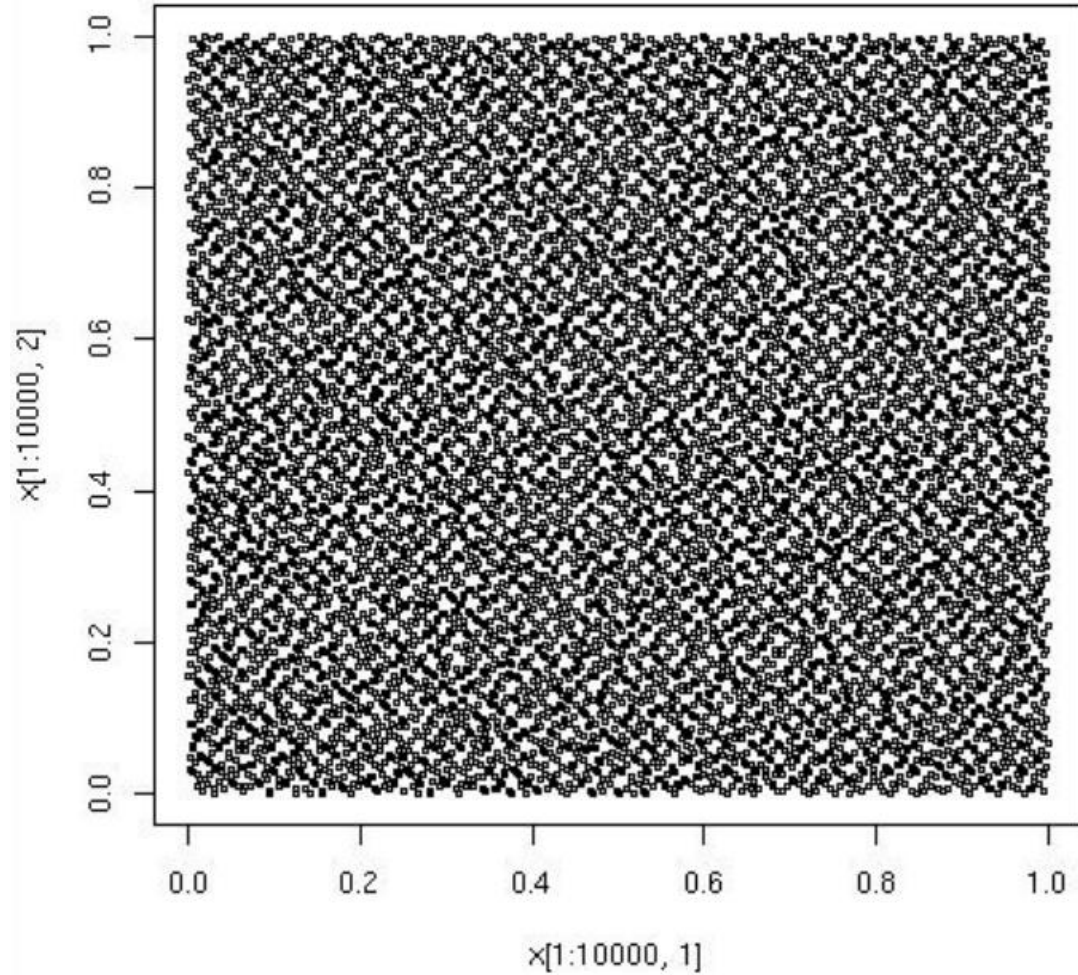
- ▶ ha previsto l'esecuzione di **800 procedure di ottimizzazione**, ognuna a partire da un **differente insieme di parametri iniziali**. Ogni insieme di parametri iniziali è stato selezionato utilizzando **sequenze quasi-random di Sobol**.
- ▶ si è basata sull'utilizzo dell'algoritmo di ottimizzazione **Nelder-Mead** che è stato eseguito su un processore Intel i7-4510U 2.00GHz, parallelizzando la procedura sui suoi 4 *cores*. Il tempo di calcolo è stato **14 ore, 36 minuti and 2 secondi**.
- ▶ l'insieme dei parametri ottimali è stato individuato come quello cui corrispondeva la **maggiore log-verosimiglianza** tra quelle ottenute nelle 800 procedure di ottimizzazione.

Sequenze Quasi-random di Sobol

- ▶ La sequenza **quasi-random di Sobol** è una sequenza a bassa discrepanza basata sull'utilizzo di polinomi primitivi.
- ▶ La discrepanza è una **misura dell'irregolarità della distribuzione di un insieme di punti nello spazio**.
- ▶ A parità di punti, le sequenze a bassa discrepanza "coprono" lo spazio in modo più uniforme rispetto alle sequenze di numeri casuali o a sequenze deterministiche arbitrarie.
→ Per definizione, costituiscono la scelta più opportuna per esplorare lo spazio dei parametri in modo efficace.



Sequenze di Sobol vs Distribuzione Uniforme



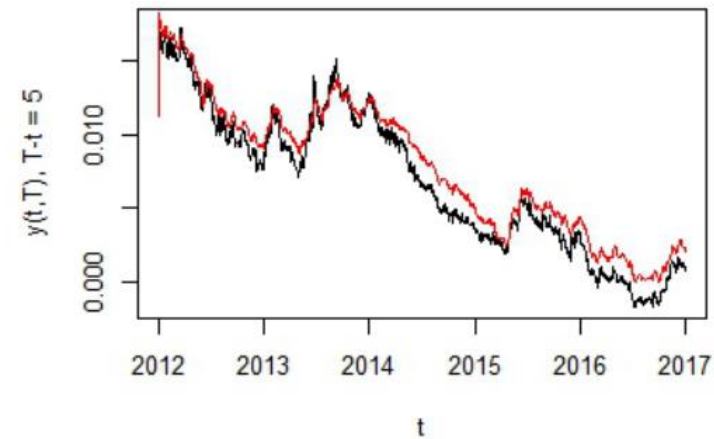
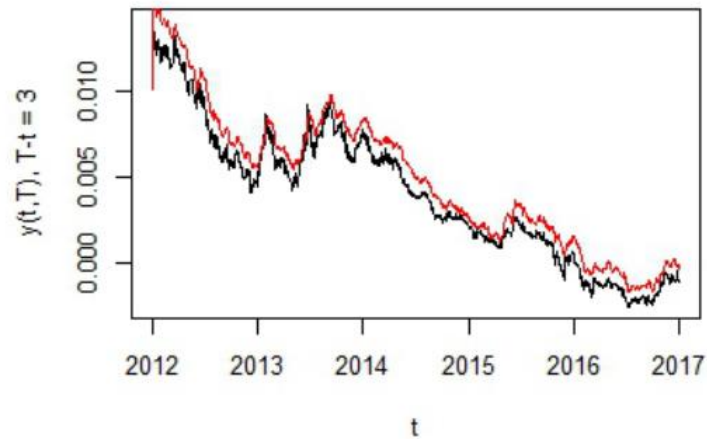
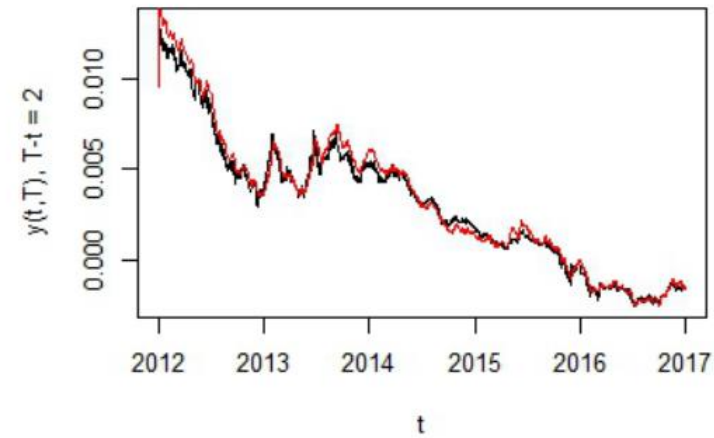
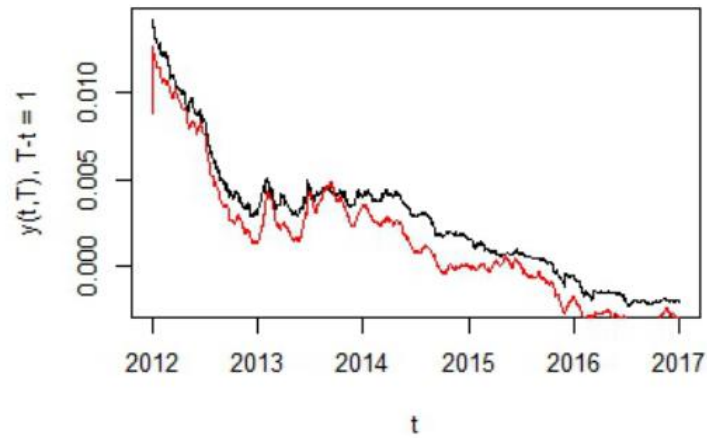
Calibrazione su dati di mercato - Risultati

Parametri	Sobol Range	Vincoli	$\hat{\psi}$
θ_1	[0;0.02]	$-0.04 \leq \theta_1 + \theta_2 \leq 0.04$ $-0.04 \leq \theta_1 + \theta_2 \leq 0.04$	0.0003
θ_2	[0;0.02]		0.0078
$\hat{\theta}_1$	-	-	0.0116
$\hat{\theta}_2$	[0;1]	-	0.0071
k_1	[0;1]	-	0.0302
k_2	[0;1]	-	0.1834
\hat{k}_1	[0;1]	$\hat{k}_2 > \hat{k}_1$	0.1356
\hat{k}_2	[0;1]	$\hat{k}_2 > \hat{k}_1$	0.0210
σ_1	[0;0.02]	$\sigma_1 \geq 0$	0.0061
σ_2	[0;0.02]	$\sigma_2 \geq 0$	0.0060
ρ	[-1;-0.75]	$-1 \leq \rho \leq 1$	-0.9402
h	0.0005	$h \geq 0$	0.0009
y_∞	[0;0.04]	-	-0.0112
$E_t[r(\infty)]$	-	$-0.04 \leq E_t[r(\infty)] \leq 0.04$	0.0081
$\sqrt{\text{Var}_t[r(\infty)]}$	-	-	0.0200

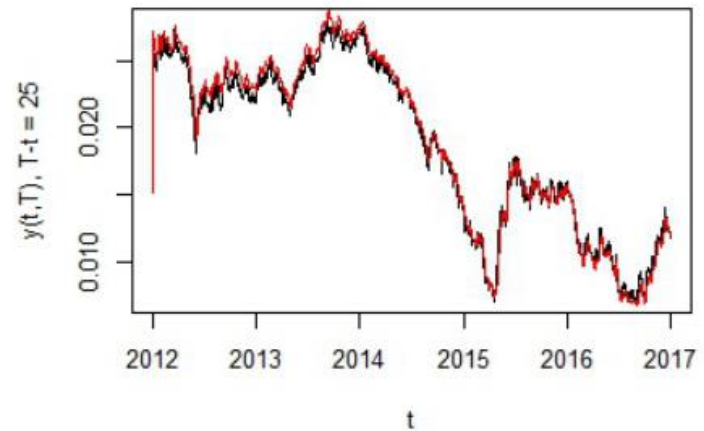
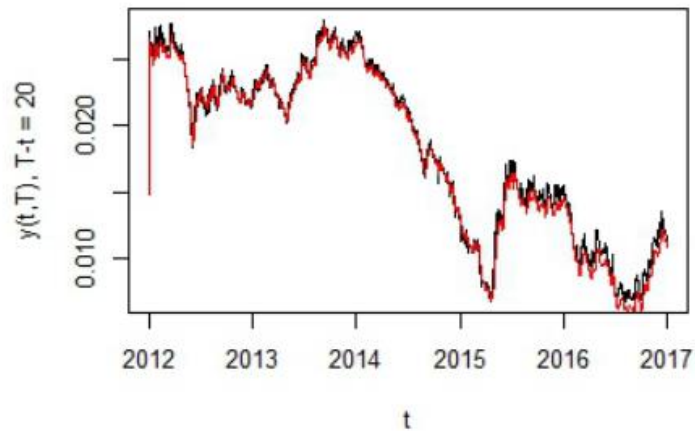
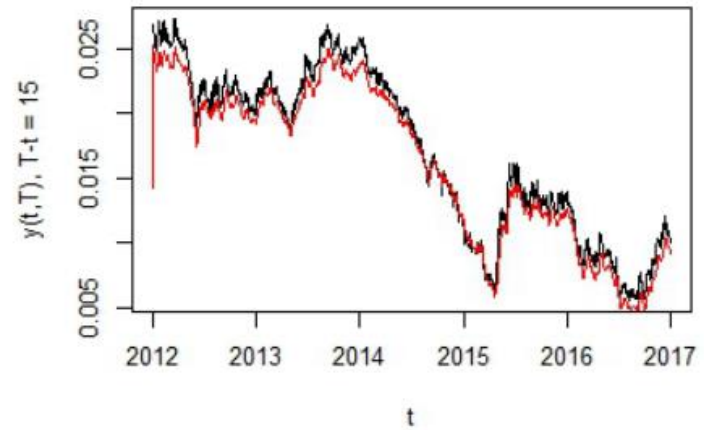
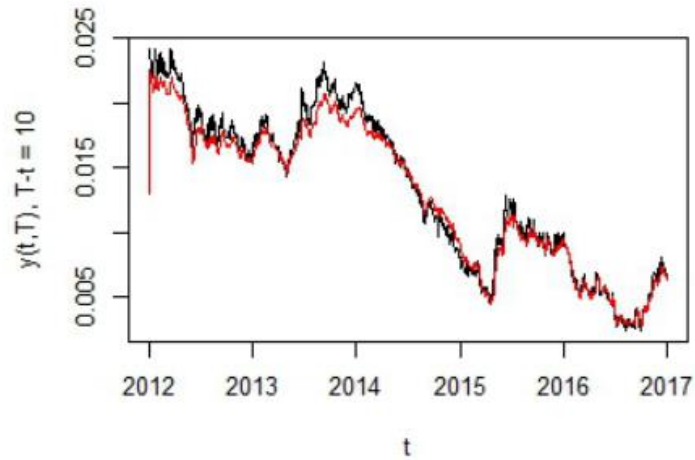
- ▶ Vincoli e range di estrazione per θ_1 e θ_2 sono definiti per inizializzare l'algoritmo da valori compresi tra 0% e 1%. Tale scelta si deve all'aspettativa che la somma dei due parametri, uguale a $E_t[r(\infty)]$, sia coerente con il livello corrente delle intensità di rendimento a scadenza per scadenze brevi.
- ▶ il range di y_∞ ha l'obiettivo di inizializzare l'algoritmo con valori ragionevoli per il valore asintotico delle intensità di rendimento a scadenza.
- ▶ \hat{k}_2 è stato scelto maggiore di \hat{k}_1 al fine di evitare soluzioni duplicate con i parametri invertiti.



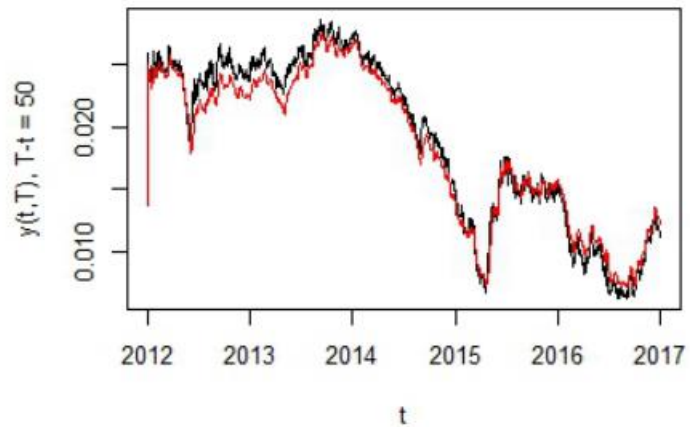
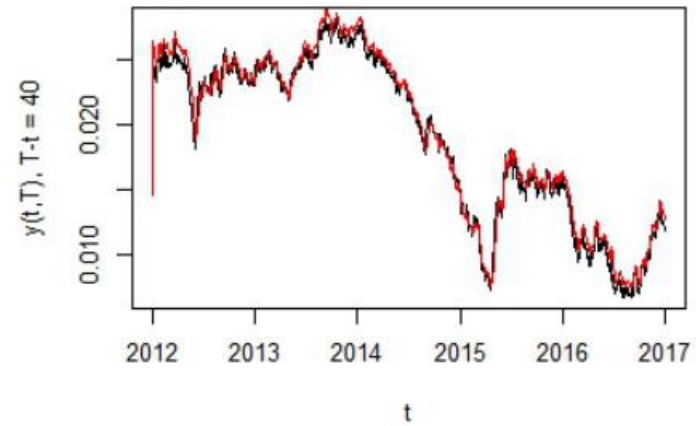
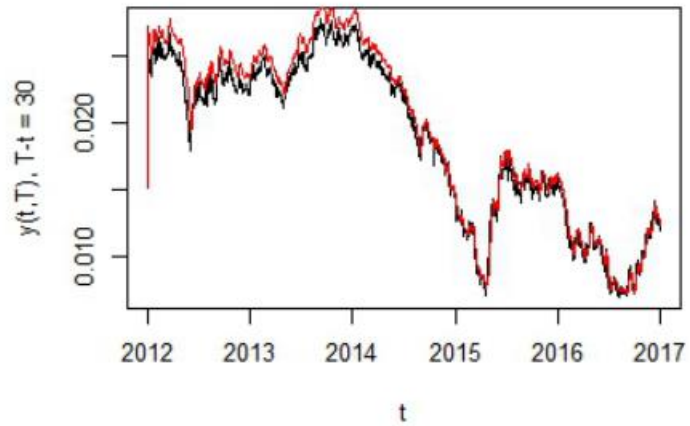
Calibrazione su dati di mercato - Risultati



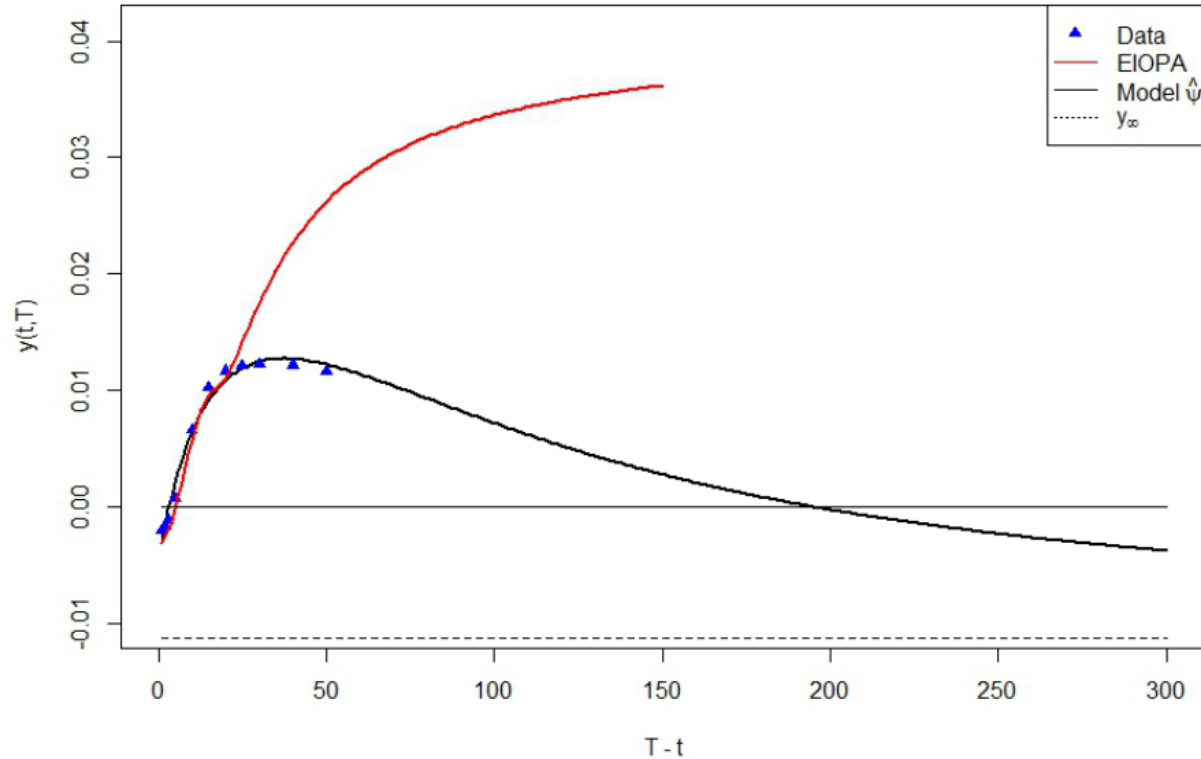
Calibrazione su dati di mercato - Risultati



Calibrazione su dati di mercato - Risultati

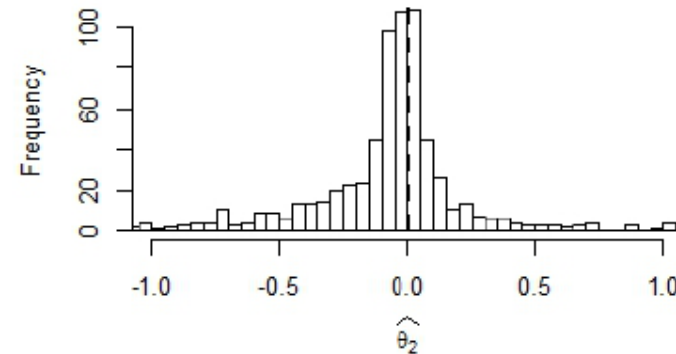
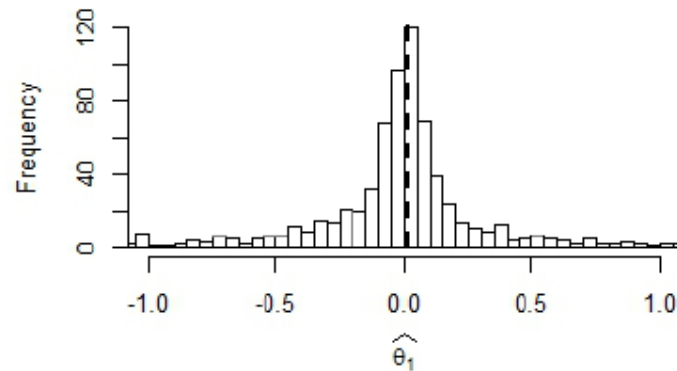
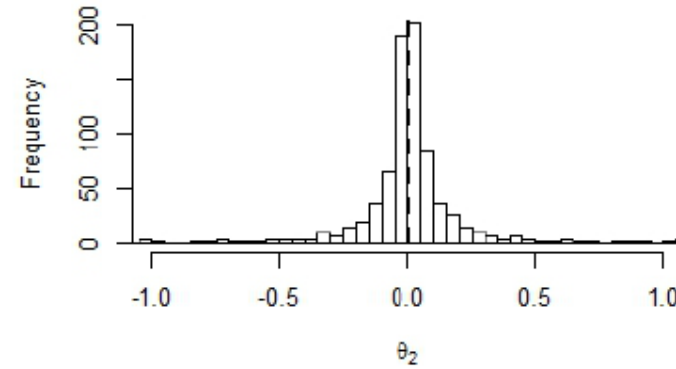
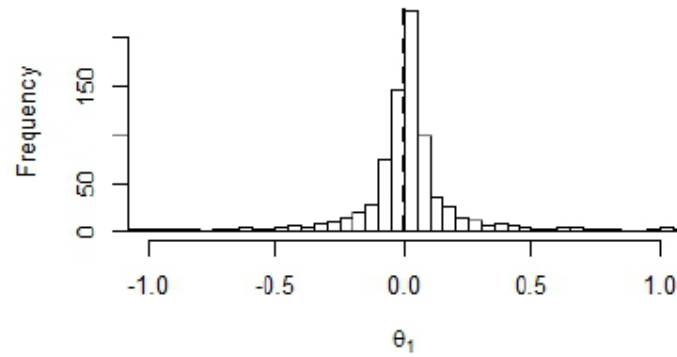


Calibrazione su dati di mercato - Risultati

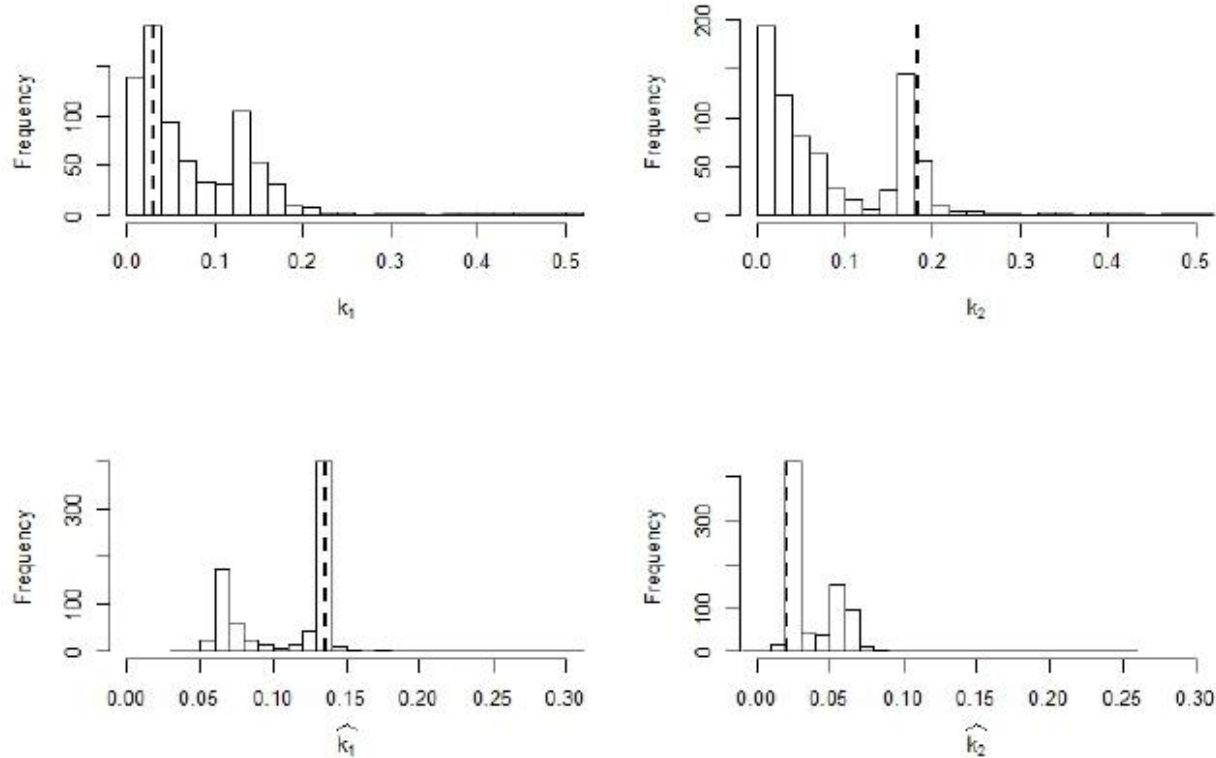


- ▶ I dati di mercato al 31/12/2016 sono replicati adeguatamente.
- ▶ Sebbene l'estrapolazione della struttura sia discutibile da un punto di vista economico, non avrebbe impatti materiali nel caso di valutazione delle riserve tecniche in base a Solvency II, che in ambito vita presentano raramente durate superiori ai 60 anni.

Calibrazione su dati di mercato – Distribuzione dei parametri

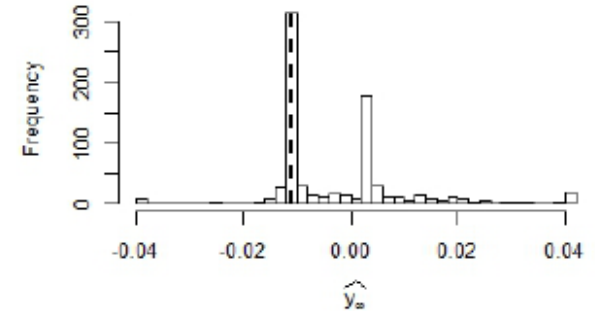
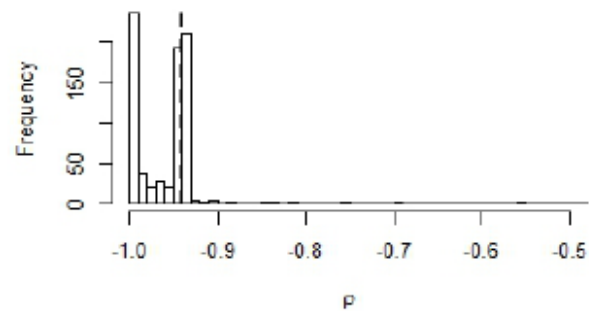
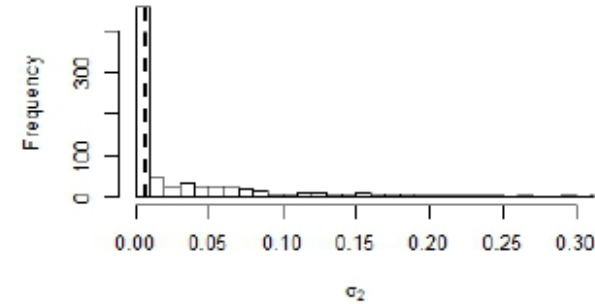
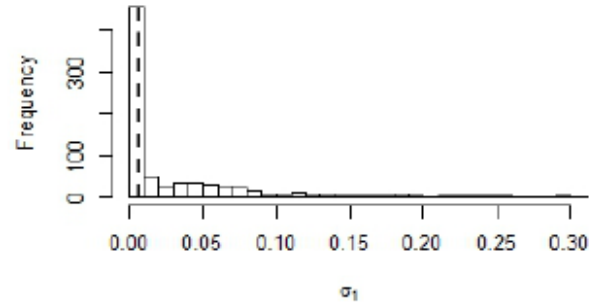


Calibrazione su dati di mercato – Distribuzione dei parametri



- ▶ $\rho, y_\infty, k_1, k_2, \hat{k}_1$ e \hat{k}_2 hanno una distribuzione bimodale dovuta alla probabile presenza di un massimo locale che porta l'algoritmo di ottimizzazione a selezionare due diversi set di parametri alternativamente.
- ▶ Analizzando il caso bimodale di y_∞ , notiamo che comparando la seconda moda della distribuzione (circa 0.4%) con la prima moda, la *log-verosimiglianza* decresce solo dello 0.7%

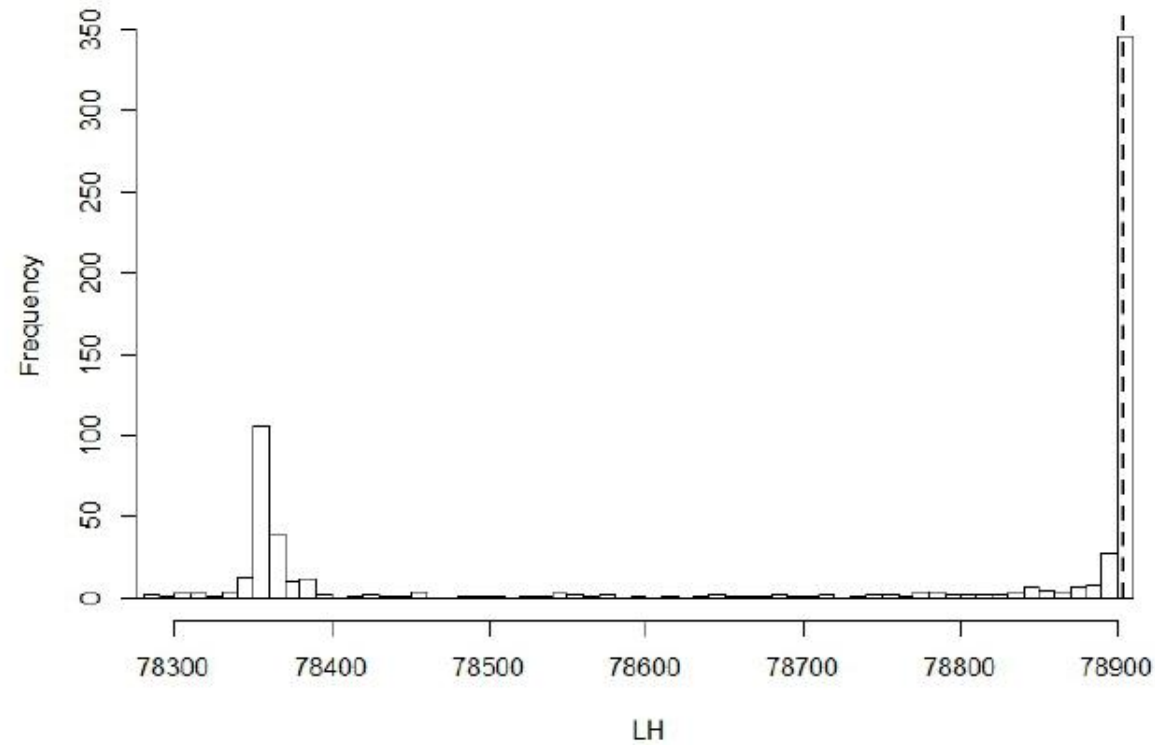
Calibrazione su dati di mercato – Distribuzione dei parametri



- ▶ ρ , y_∞ , k_1 , k_2 , \hat{k}_1 e \hat{k}_2 hanno una distribuzione bimodale dovuta alla probabile presenza di un massimo locale che porta l'algoritmo di ottimizzazione a selezionare due diversi set di parametri alternativamente.
- ▶ Analizzando il caso bimodale di y_∞ , notiamo che comparando la seconda moda della distribuzione (circa 0.4%) con la prima moda, la *log-verosimiglianza* decresce solo dello 0.7%



Problema del massimo locale



- ▶ La funzione di log-verosimiglianza presenta un massimo locale che è molto vicino al massimo assoluto (la perdita di verosimiglianza è circa di 0.7%) e compreso tra 78350 e 78400.



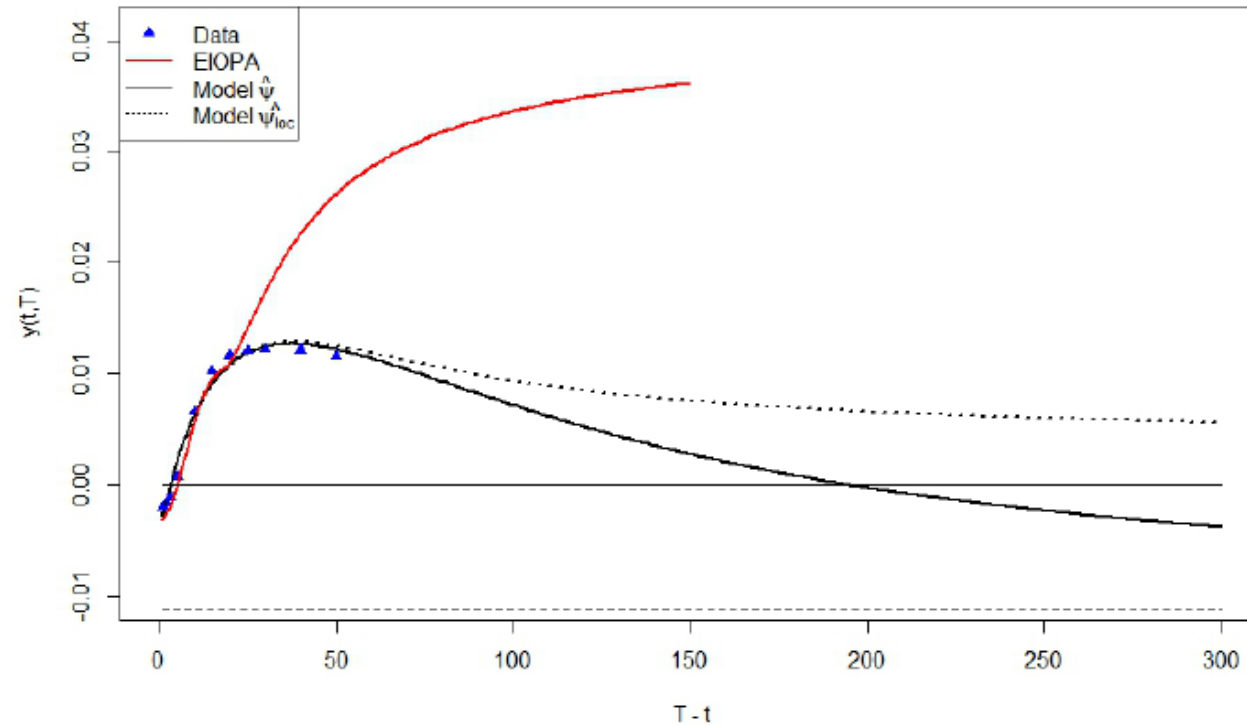
Problema del massimo locale – Comparazione parametri

Parametri	Max Locale [78350;78400] - 169 set di par.			Max Assoluto [78850;78903] - 396 set di par.		
	$\widehat{\psi}_{loc}$	Media	Std Dev	$\widehat{\psi}$	Media	Std Dev
θ_1	-0.0067	0.0566	0.3817	0.0003	0.0174	0.3044
θ_2	0.0256	-0.0456	0.3811	0.0078	-0.0056	0.3040
$\hat{\theta}_1$	1.1491	0.3931	1.3085	0.0115	0.0635	0.3835
$\hat{\theta}_2$	-1.1356	-0.3584	1.424	0.0071	-0.0447	0.3836
k_1	0.0607	0.05883	0.0315	0.0302	0.0768	0.0592
k_2	0.0562	0.06198	0.0351	0.1834	0.1016	0.0764
\hat{k}_1	0.0647	0.0677	0.0043	0.1356	0.1353	0.0016
\hat{k}_2	0.0603	0.0586	0.0027	0.0210	0.0212	0.0009
σ_1	0.1193	0.0962	0.0747	0.0061	0.0062	0.0002
σ_2	0.1194	0.0973	0.0766	0.0060	0.0060	0.0002
ρ	-0.9997	-0.9988	0.0018	-0.9402	-0.9402	0.0034
$E_t[r(\infty)]$	0.0189	0.0111	0.3361	0.0081	0.0118	0.2988
$\sqrt{\text{Var}_t[r(\infty)]}$	0.0200	0.0366	0.3164	0.0200	0.0402	0.5856
y_∞	0.0035	0.0042	0.0041	-0.0112	-0.0108	0.0018
$\ell(y \psi)$	78398.61	78360.30	9.76	78903.41	78900.06	7.73

- ▶ $(\widehat{\psi}_{loc})$ ha ρ approssimativamente uguale a -1 e le coppie k_1, k_2 e \hat{k}_1, \hat{k}_2 mostrano risultati simili.
- ▶ Tutte le distribuzioni dei parametri, eccetto k_1, k_2 e ρ , hanno una deviazione standard maggiore rispetto al massimo assoluto .
- ▶ I valori medi del set di parametri relativi al massimo locale sono coerenti con la seconda moda delle distribuzioni di $k_1, k_2, \hat{k}_1, \hat{k}_2, \rho$ e y_∞ mostrate in precedenza.



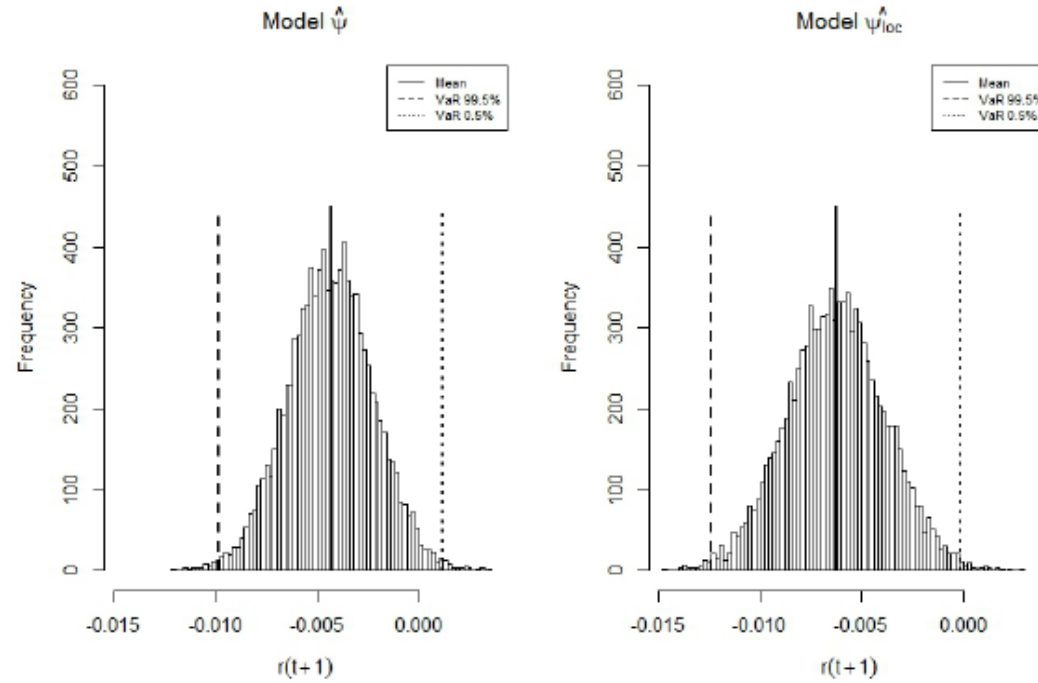
Problema del massimo locale – Implicazioni in Solvency II



- ▶ Entrambi i modelli riproducono i dati di mercato adeguatamente.
- ▶ I modelli proiettano in modo simile la distribuzione di $r(t)$ su orizzonte annuale.

Problema del massimo locale – Implicazioni in Solvency II

$r(t)$ (bps)	Model $\hat{\psi}$	Model $\hat{\psi}_{loc}$
<i>Mean</i>	-43	-62
<i>Std Dev</i>	21	24
<i>VaR 0.5%</i>	-55	-61

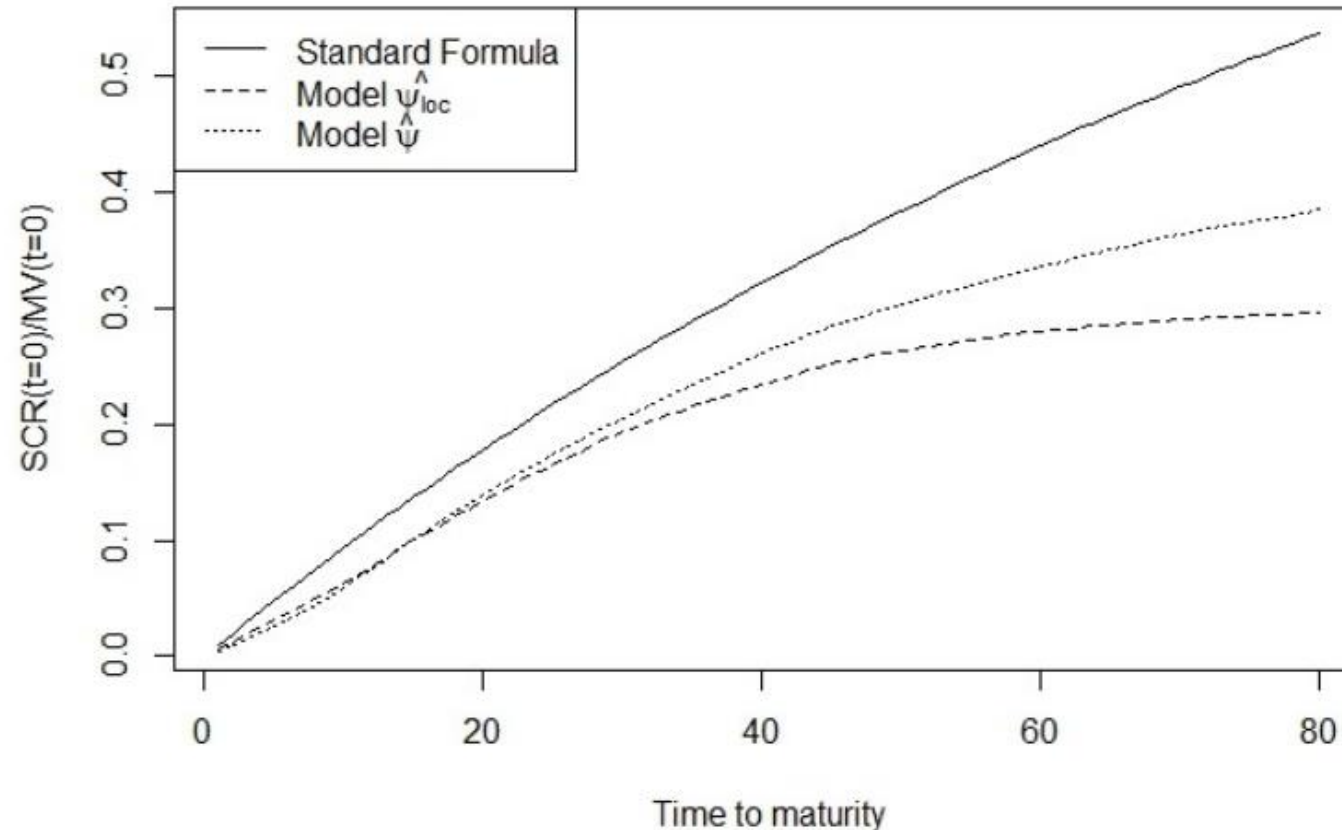


- ▶ Entrambi i modelli riproducono i dati di mercato adeguatamente.
- ▶ I modelli proiettano in modo simile la distribuzione di $r(t)$ su orizzonte annuale.



Problema del massimo locale – Implicazioni in Solvency II

- ▶ Il modello calibrato sulla base della procedura presentata nelle slide precedenti è stato utilizzato per stima il **Solvency Capital Requirement** (SCR) di un insieme di *zero coupon bond* al 31 Dicembre 2016 con scadenze da 1 a 80 anni.
- ▶ Il SCR associato a ogni *zero coupon bond* è stato calcolato come il **VaR** del valore di mercato dei bond ad un livello di probabilità di **99.5%** su **orizzonte annuale**.
- ▶ La figura mostra che entrambi i modelli determinano SCR simili alla Standard Formula fino a scadenze pari a 25 anni.



Problema del massimo locale – Applicazione di un vincolo aggiuntivo

- ▶ Al fine di stabilizzare la stima dei parametri ed evitare casi degeneri relativi alla risoluzione del problema di ottimizzazione, un nuovo vincolo viene aggiunto nella procedura di calibrazione al fine di escludere le soluzioni con $\rho \approx -1$.
- ▶ Il nuovo insieme di parametri ottimi è simile al precedente.

Parametri	Sobol Range	Vincoli	$\widehat{\psi}_\rho$
θ_1	[0;0.02]	$-0.04 \leq \theta_1 + \theta_2 \leq 0.04$	-0.0600
θ_2	[0;0.02]	$-0.04 \leq \theta_1 + \theta_2 \leq 0.04$	0.0356
$\hat{\theta}_1$	-	-	-0.0528
$\hat{\theta}_2$	[0;1]	-	-0.0340
k_1	[0;1]	-	0.0204
k_2	[0;1]	-	0.1731
\hat{k}_1	[0;1]	$\hat{k}_2 > \hat{k}_1$	0.1358
\hat{k}_2	[0;1]	$\hat{k}_2 > \hat{k}_1$	0.0209
σ_1	[0;0.02]	$\sigma_1 \geq 0$	0.0062
σ_2	[0;0.02]	$\sigma_2 \geq 0$	0.0060
ρ	[-0.97;-0.75]	$-0.97 \leq \rho \leq 1$	-0.9405
h	0.0005	$h \geq 0$	0.0009
$E_t[r(\infty)]$	-	$-0.04 \leq E_t[r(\infty)] \leq 0.04$	0.0243
$\sqrt{\text{Var}_t[r(\infty)]}$	-	-	0.0259
y_∞	[0;0.04]	-	-0.0112
$\ell(y \psi)$	-	-	78903.23

Problema del massimo locale – Applicazione di un vincolo aggiuntivo

- ▶ Avendo incluso il vincolo aggiuntivo su ρ non si verifica più il fenomeno del massimo locale.

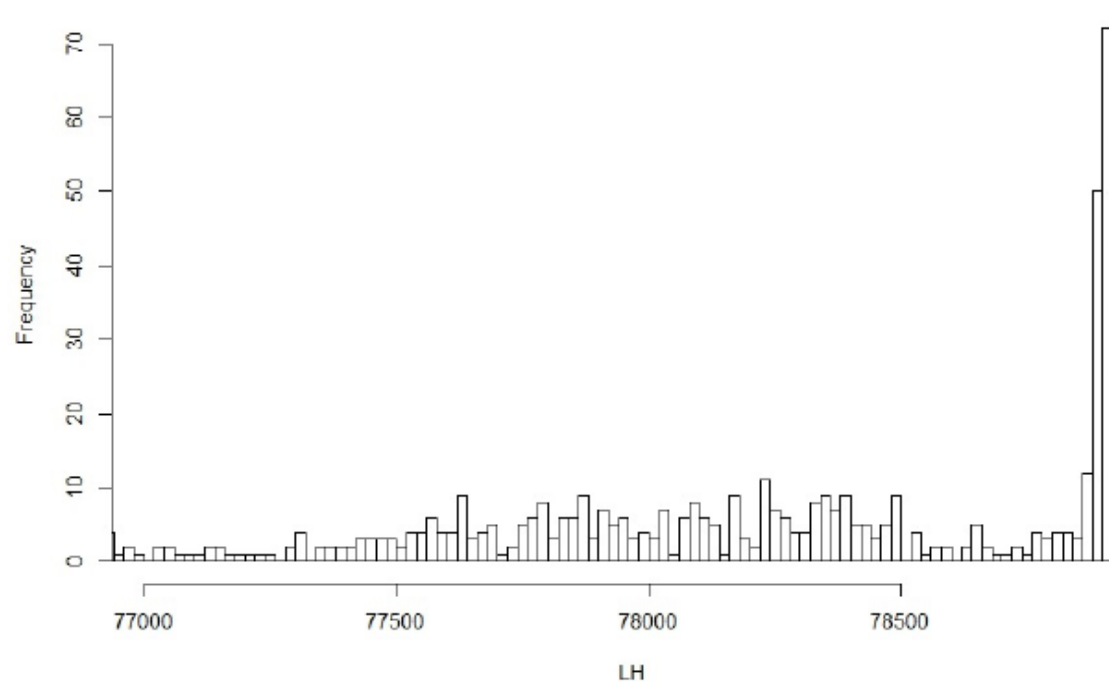
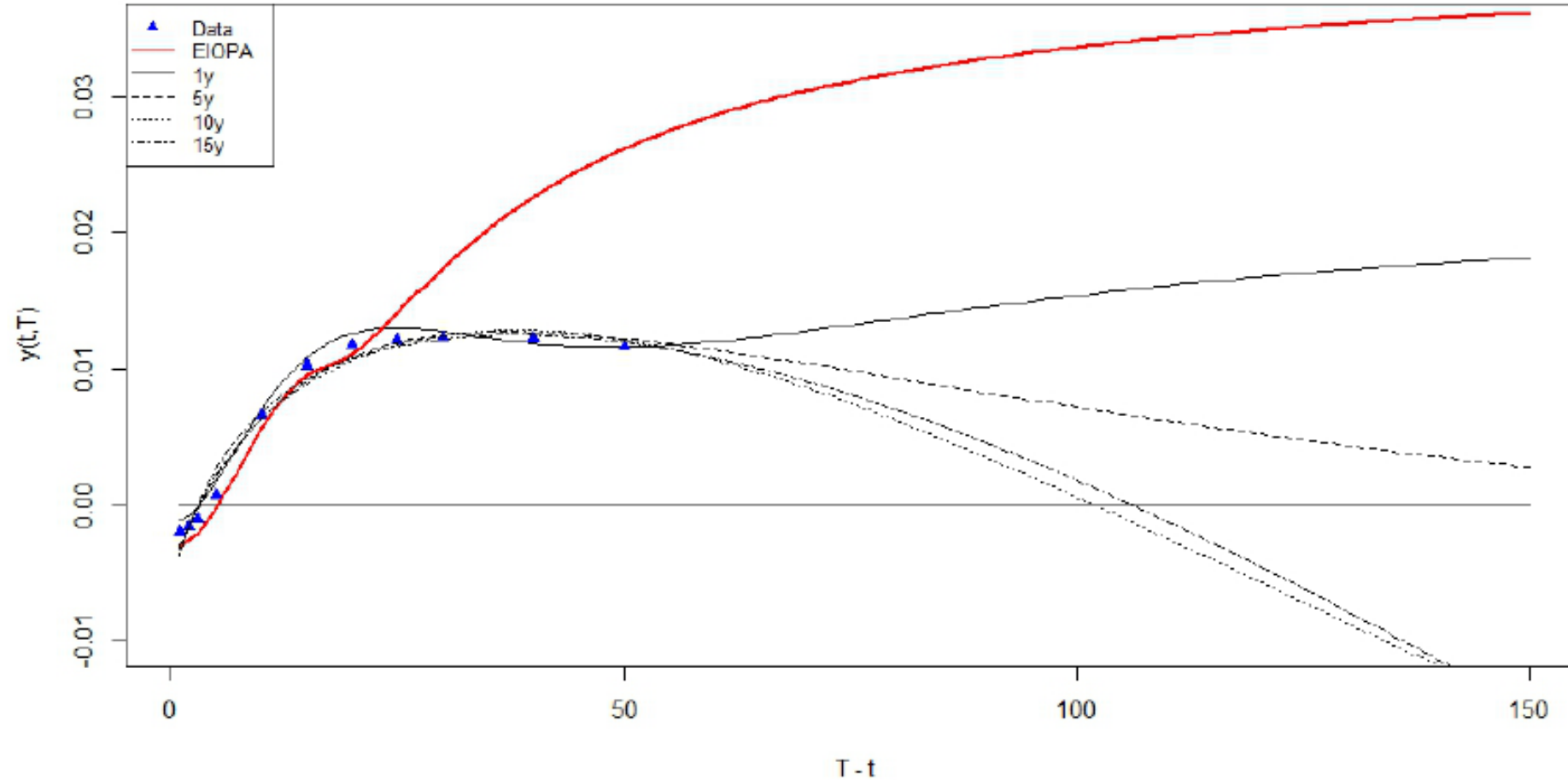
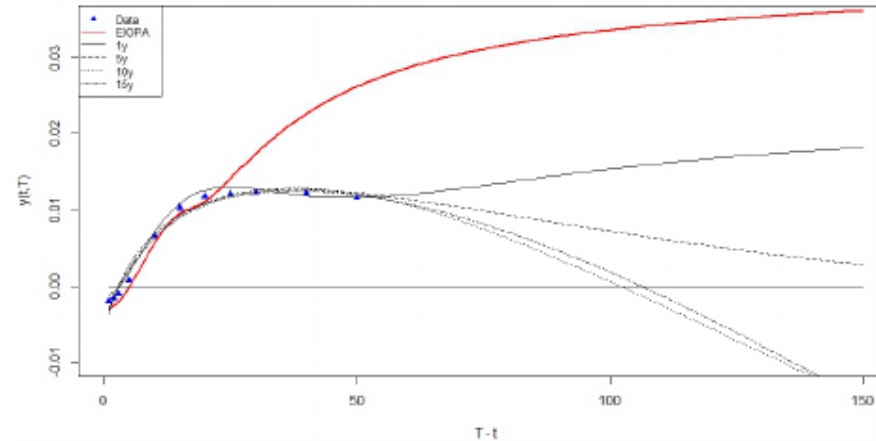


Figure: Distribuzione della verosimiglianza derivata dalla procedura di calibrazione sui dati di mercato, partendo da diversi set di parametri iniziali generati con sequenze quasi random di Sobol e il vincolo addizionale su ρ . La linea tratteggiata specifica la massima verosimiglianza.

Estrapolazione – Confronto tra diverse profondità della serie storica



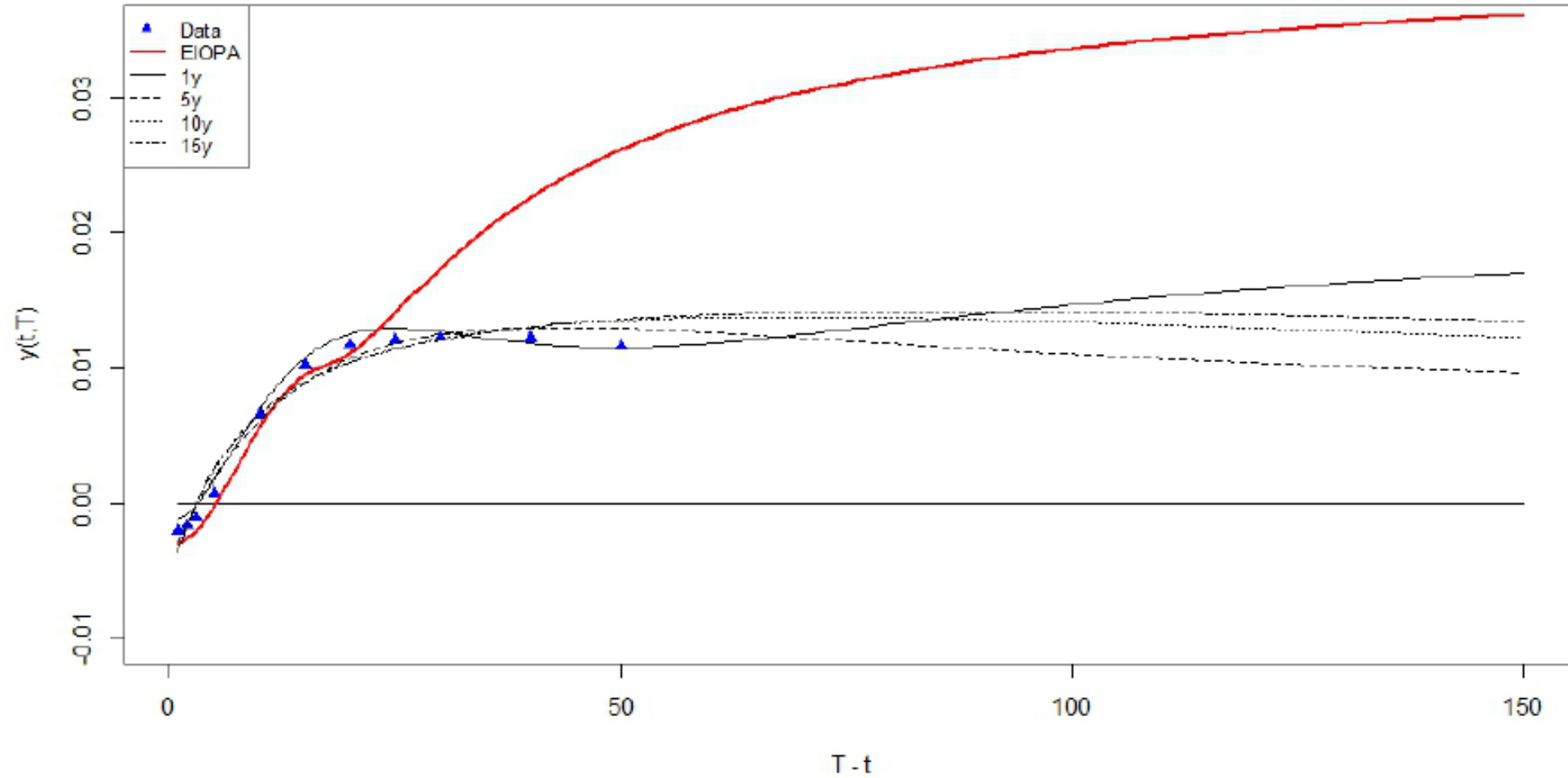
Estrapolazione – Confronto tra diverse profondità della serie storica



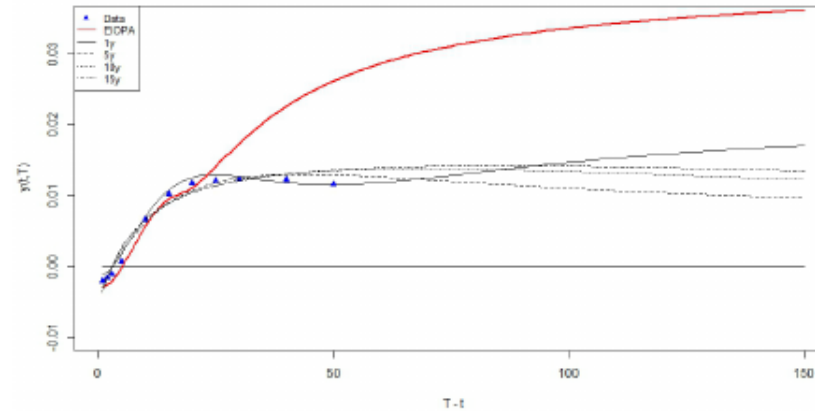
Profondità serie storica	1y	5y	10y	15y
$E_t[r(\infty)]$	0.0342	0.0243	0.0218	0.0112
y_∞	0.0241	-0.0113	-0.1109	-0.2680
$\ell(y \psi)$	17819.98	78903.23	149564.03	228494.99
1y SCR	23.22%	0.53%	1.12%	1.11%
5y SCR	34.07%	2.71%	5.50%	4.77%
10y SCR	26.46%	6.14%	12.87%	10.16%
30y SCR	23.86%	21.67%	37.81%	29.83%

- ▶ Il modello è robusto nel fitting dei dati *in sample* ma non identifica bene il livello asintotico di $y(t, T)$ che varia dal 2% al -26% (non soddisfacente in termini economici).
- ▶ Il modello è lontano dal trovare valori di y_∞ vicini all'UFR prescritto da Solvency II.

Estrapolazione – Applicazione di un vincolo aggiuntivo



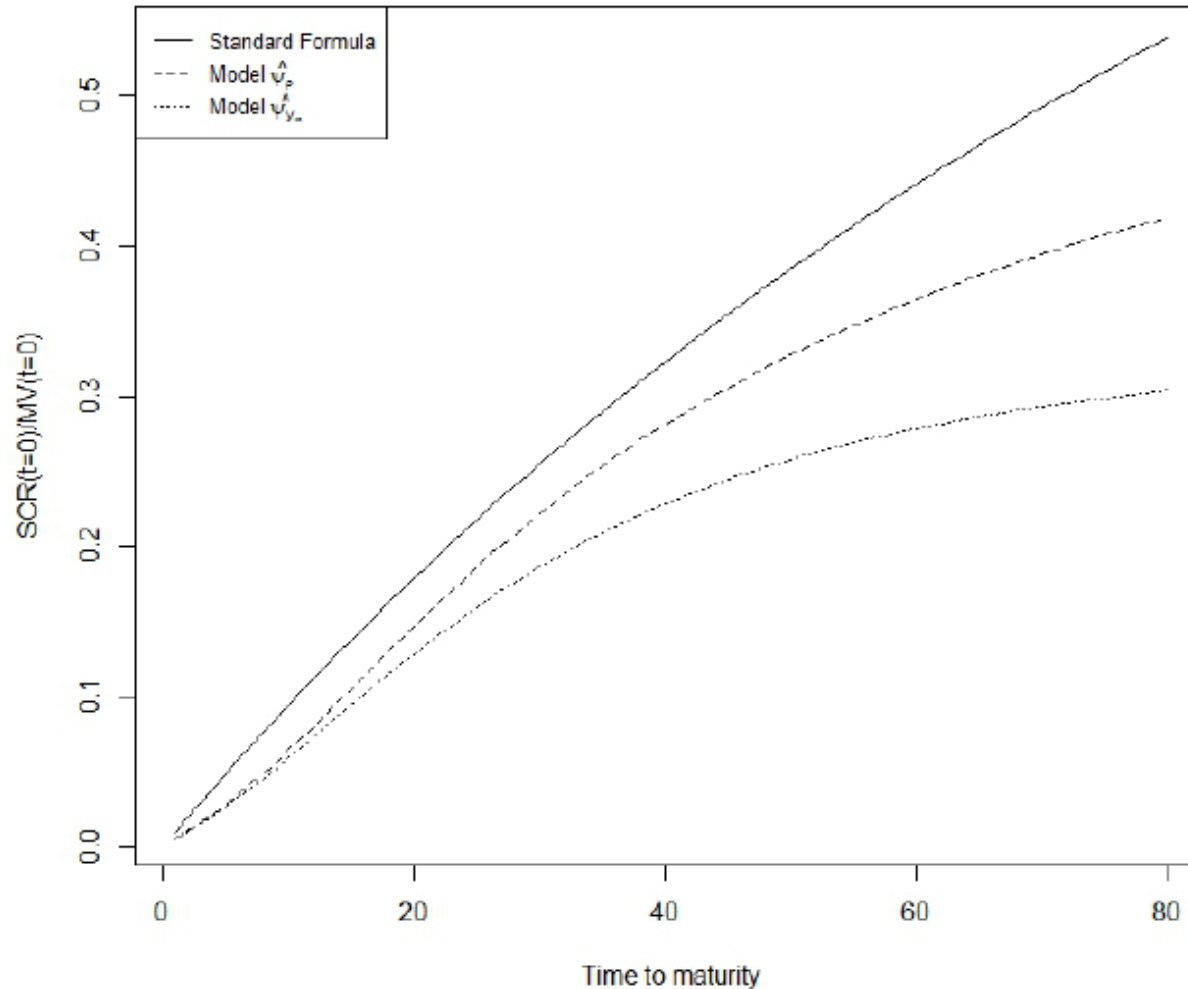
Estrapolazione – Applicazione di un vincolo aggiuntivo



Time series depth	1y	5y	10y	15y
$E_t[r(\infty)]$	0.0342	0.0141	0.0068	0.0249
$\sqrt{\text{Var}_t[r(\infty)]}$	0.0386	0.0231	0.0280	0.0314
y_∞	0.0221	0.0065	0.0065	0.0065
$\ell(y \psi)$	17819.65	78514.58	147616.61	225687.16
1y SCR	23.07%	0.54%	1.08%	1.11%
5y SCR	35.60%	2.65%	4.06%	4.03%
10y SCR	28.31%	5.87%	7.32%	6.50%
30y SCR	24.74%	18.44%	19.56%	15.26%

- Il modello $\widehat{{}_5\psi_{y_\infty}}$ determina risultati ragionevoli e replica in modo appropriato i dati di mercato. La perdita di verosimiglianza dovuta all'inclusione del vincolo aggiuntivo p è molto molto bassa (meno di 1.5%) per tutte le serie storiche considerate.

Estrapolazione – Applicazione di un vincolo aggiuntivo



- ▶ $\widehat{\psi}_{y_\infty}$ generalmente determina un SCR simile al modello $\widehat{\psi}_\rho$ ed alla Standard Formula fino alla scadenza 30 anni. Valori più bassi sono ottenuti per scadenze più lunghe.



Framework di validazione

Test di validazione

1. **Calibrazione su un campione di dati Monte Carlo partendo da un intorno dei parametri veri** - questo test ha avuto l'obiettivo di escludere la presenza di distorsioni nella procedura di ottimizzazione e dimostrare la stabilità della calibrazione in caso nuove informazioni vengano aggiunte al campione dei dati di mercato.
2. **Calibrazione su un campione di dati Monte Carlo scegliendo i parametri iniziali con sequenze quasi-random di Sobol** - questo test ha avuto l'obiettivo di escludere la dipendenza dei parametri individuati come ottimi rispetto dal set di parametri iniziali.
3. **Sensitivity a diversi timestep** - questo test ha avuto l'obiettivo di verificare che il framework di calibrazione fosse robusto nella stima dei parametri attraverso la comparazione dei risultati ottenuti utilizzando differenti timestep di proiezione (giornaliero, settimanale e bi-settimanale).



Framework di validazione – Test 1 su un campione di dati simulati

Calibrazione su un campione di dati Monte Carlo partendo da un intorno dei parametri veri

Questo esercizio di validazione ha avuto l'obiettivo di verificare quanto la tecnica di calibrazione fosse efficace nell'identificare i parametri che hanno generato i dati **partendo da parametri iniziali selezionati in un intorno dei parametri veri prefissati**. Di seguito la procedura seguita:

1. **Generazione di 1200 traiettorie** delle variabili di stato attraverso la discretizzazione con passo giornaliero dell'equazione (2), per 5 anni di proiezione.
 2. Per ogni traiettoria sono state calcolate le **intensità di rendimento a scadenza** relative alle scadenze 1, 2, 3, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35 e 40 anni.
 3. **Esecuzione della procedura di ottimizzazione finalizzata alla stima dei parametri del modello per ognuno dei set di dati simulati**, eseguite utilizzando l'algoritmo di ottimizzazione **Nelder-Mead**.
 4. **Estrazione casuale dei parametri iniziali**, simulati a partire da una **variabile casuale normale** con media il parametro vero e deviazione standard pari al 10%.
 5. Il tempo di calcolo è stato di **4 ore, 09 minuti e 36 secondi**.
- Sulla base dei risultati si può concludere che **la tecnica di calibrazione risulta adeguata per la stima dei parametri del modello**.



Test 1 su un campione di dati simulati – Risultati

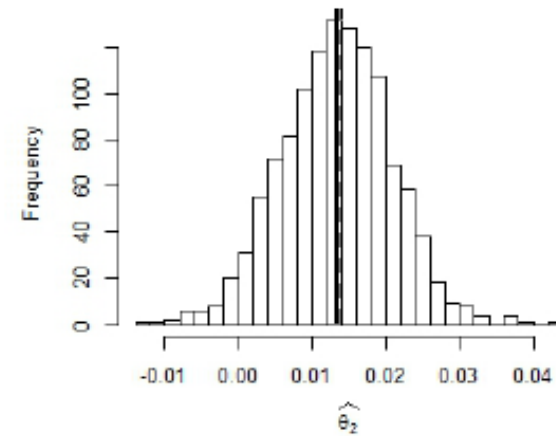
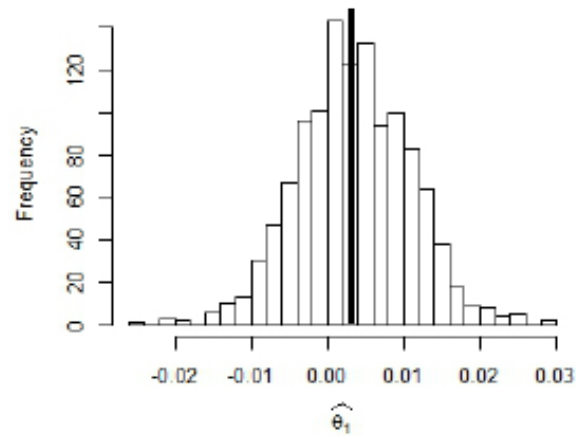
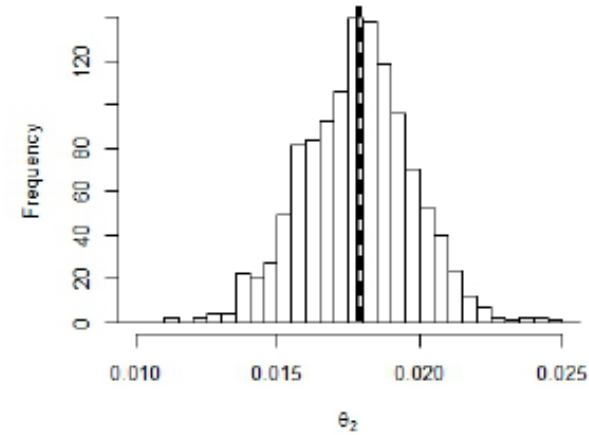
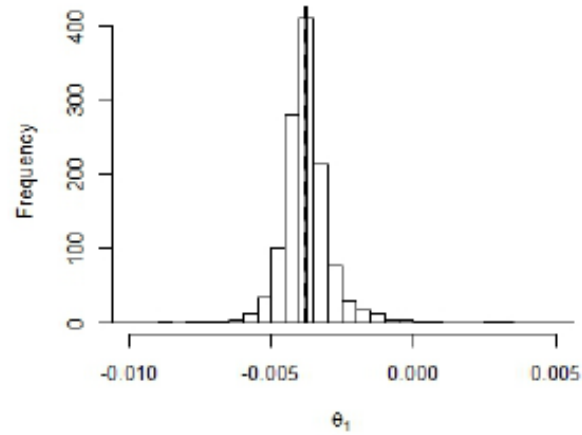
- ▶ Tutti gli errori standard sono generalmente inferiori ad 1 e mai superiori a 1.4, dimostrando che l'errore di stima è generalmente compatibile con l'errore statistico.

Parametri	$\sigma_{\psi_{y_\infty}}$	Media Par St	Std Dev Par St	Standard Error
θ_1	-0.0038	-0.0038	0.0010	-0.0279
θ_2	0.0179	0.0178	0.0020	0.0391
$\hat{\theta}_1$	0.0030	0.0035	0.0074	-0.0628
$\hat{\theta}_2$	0.0140	0.0133	0.0075	0.0900
k_1	0.0269	0.5352	0.4550	-1.1172
k_2	0.1263	0.7166	0.4891	-1.2068
\hat{k}_1	0.1201	0.1187	0.0070	0.1999
\hat{k}_2	0.0356	0.0365	0.0022	-0.4140
σ_1	0.0072	0.0074	0.0008	-0.1542
σ_2	0.0060	0.0060	0.0003	0.1577
ρ	-0.9541	-0.9548	0.0117	0.0606
h	0.0009	0.0009	0.0000	0.0673
$E_t[r(\infty)]$	0.0141	0.0141	0.0342	-0.0263
y_∞	0.0065	0.0068	0.0004	-0.7580

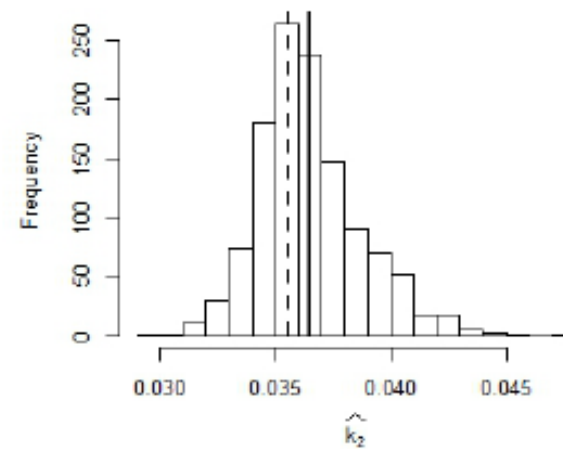
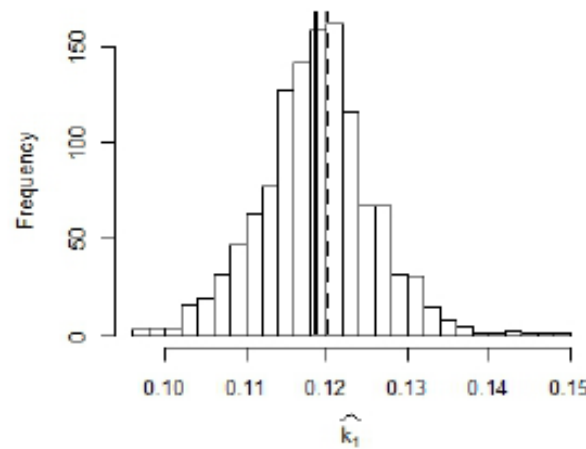
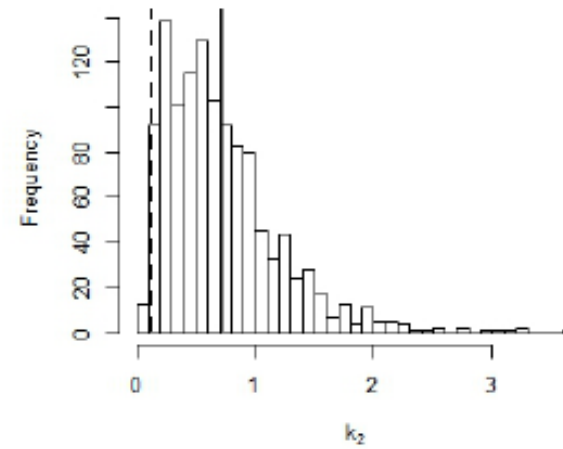
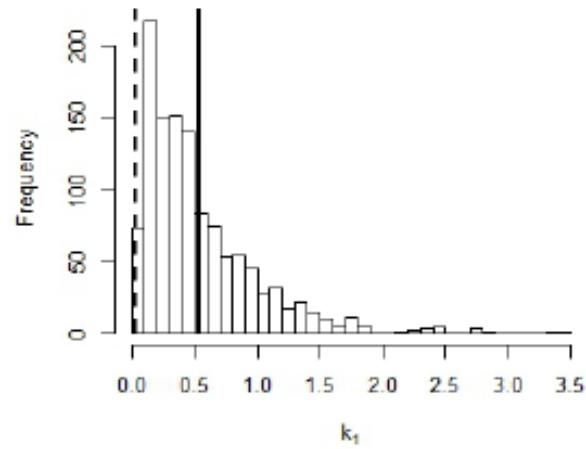
- ▶ k_1 e k_2 presentano standard error maggiori di 1.
- ▶ Le figure seguenti rappresentano le distribuzioni dei parametri ottenute in questo esercizio di validazione. I **parametri veri** sono indicati con una linea tratteggiata, i **parametri stimati** con linea continua.



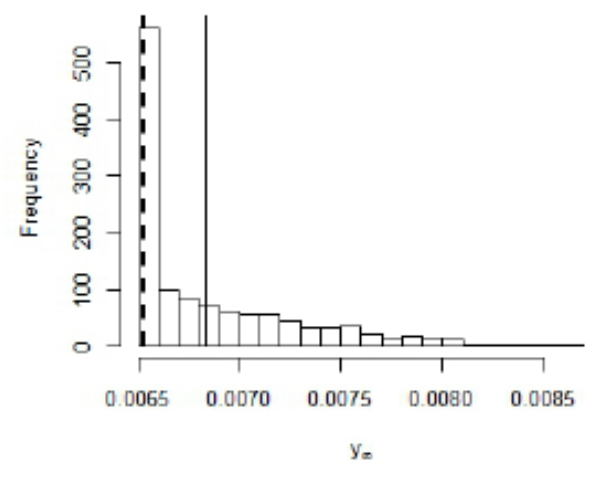
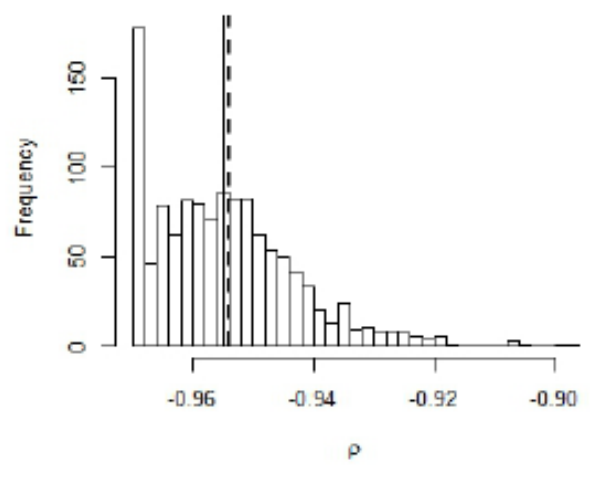
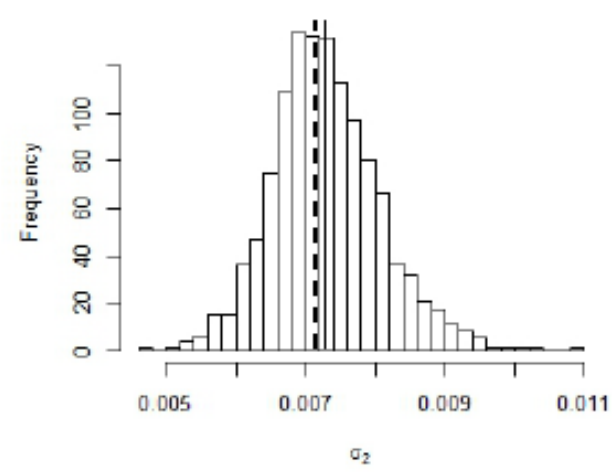
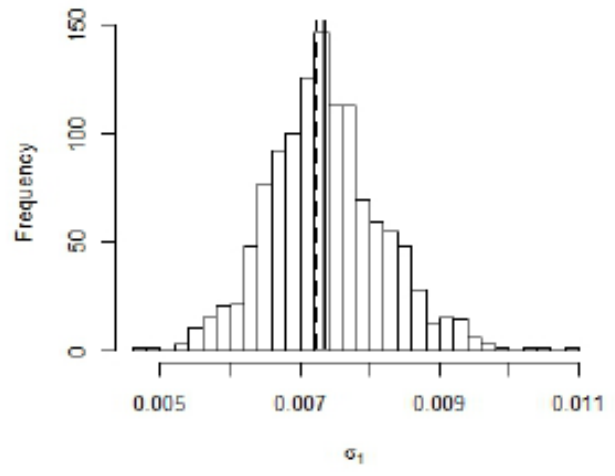
Test 1 su un campione di dati simulati – Distribuzione dei parametri



Test 1 su un campione di dati simulati – Distribuzione dei parametri



Test 1 su un campione di dati simulati – Distribuzione dei parametri



Framework di validazione - Test 2 su un campione di dati simulati

Calibrazione su un campione di dati Monte Carlo scegliendo i parametri iniziali con sequenze quasi-random di Sobol

Questo esercizio di validazione ha avuto l'obiettivo di verificare quanto la tecnica di calibrazione fosse efficace nell'identificare i parametri che hanno generato 1 dataset simulato, **partendo da parametri iniziali selezionati analogamente a quanto effettuato per la calibrazione sui dati reali**. Di seguito la procedura seguita:

1. Un set di dati è stato **simulato attraverso la discretizzazione con passo giornaliero** dell'equazione (2).
 2. Sono state eseguite **800 procedure** di ottimizzazione ognuna a partire da un diverso set di parametri iniziali. Ogni vettore dei parametri iniziali è stato opportunamente selezionato utilizzando sequenze **quasi-random di Sobol**.
 3. Ogni procedura di calibrazione ha previsto l'utilizzo dell'algoritmo di ottimizzazione **Nelder-Mead** e il tempo di calcolo è stato di **10 ore, 25 minuti e 48 secondi**.
 4. Il risultato finale della procedura di ottimizzazione è stato il set di parametri corrispondente alla **log-verosimiglianza** maggiore tra tutte quelle ottenute con gli 800 diversi vettori di parametri iniziali.
- ▶ **I risultati sono allineati con l'esercizio di validazione precedente**. Quasi tutti i parametri sono stati stimati in modo preciso.
 - ▶ Tuttavia, per quanto riguarda k_1 e k_2 , l'algoritmo di calibrazione sembrerebbe **molto sensibile ai parametri iniziali**.
→ **possibili problemi di identificazione**.



Test 2 su un campione di dati simulati – Risultati

Table: Risultati della calibrazione effettuata su 1 dataset di dati simulati, determinati a partire da 800 insiemi di parametri iniziali selezionati utilizzando sequenze quasi-random di Sobol.

Parametri	${}^5\psi_{y_\infty}$	${}^5\hat{\psi}_{y_\infty}$
θ_1	-0.0038	0.0872
θ_2	0.0179	-0.0753
$\hat{\theta}_1$	0.0030	0.1049
$\hat{\theta}_2$	0.0140	-0.0871
k_1	0.0269	1.0045
k_2	0.1263	1.4367
\hat{k}_1	0.1201	0.1160
\hat{k}_2	0.0356	0.0381
σ_1	0.0072	0.0081
σ_2	0.0071	0.0082
ρ	-0.9541	-0.9658
h	0.0009	0.0009
$E_t[r(\infty)]$	0.0141	0.0161
$\sqrt{\text{Var}_t[r(\infty)]}$	0.0231	0.0119
$\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2$	0.0170	0.0178
y_∞	0.0065	0.0068
$\ell(y \psi)$	78773.3	78781.24



Framework di validazione – Identificabilità dei parametri

Identificabilità

Un parametro ψ_i è *identificabile* se l'intervallo di confidenza $[\sigma^-, \sigma^+]$ della sua stima è finito. In particolare, 2 tipologie di *non-identificabilità* sono riportate in letteratura (vedi Raue et al. [2009]):

- ▶ **Non-identificabilità strutturale.** Emerge a causa di una ridondante parametrizzazione del modello. Gli intervalli di confidenza di un parametro strutturalmente non identificabile ψ_i sono infiniti $[-\infty, +\infty]$. Un parametro è *strutturalmente identificabile* se un unico massimo di $\ell(\psi)$ rispetto a ψ esiste.
- ▶ **Non-identificabilità pratica.** Questo fenomeno emerge quando la qualità dei dati sperimentali non è soddisfacente. Un parametro è *praticamente non-identificabile* se gli intervalli di confidenza basati sulla verosimiglianza di ψ_i risultano infiniti in una delle direzioni (crescente o decrescente), sebbene la funzione di verosimiglianza abbia un unico massimo.

Intervalli di confidenza asintotici possono essere derivati dalla matrice Hessiana della funzione di verosimiglianza $H = \nabla^T \nabla \ell(y|\psi)|_{\hat{\psi}}$. Infatti, sulla base della matrice delle covarianze $C = 2H^{-1}$ delle stime dei parametri, gli intervalli di confidenza asintotici $[\sigma_i^-, \sigma_i^+]$ sono definiti come segue:

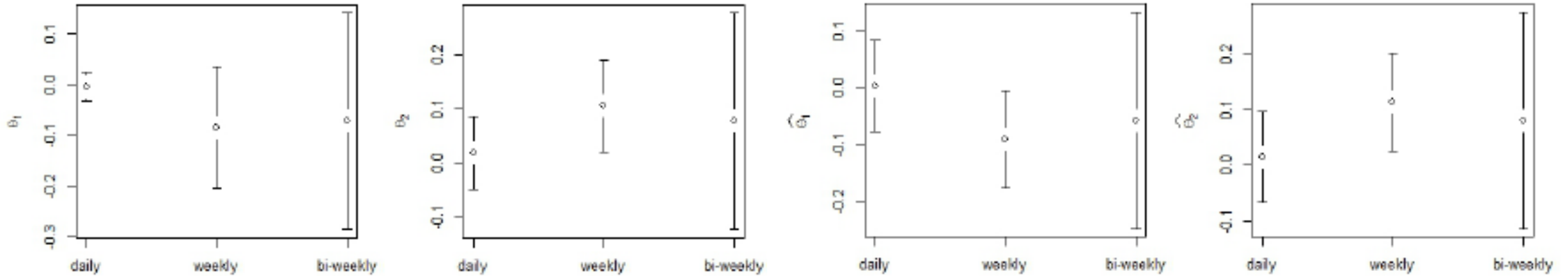
$$\sigma_i^\pm = \hat{\psi}_i \pm \sqrt{\frac{\chi^2(\alpha, df)}{2} C_{ii}}. \quad (12)$$

dove:

- ▶ $\chi^2(\alpha, df)$ è il quantile a livello α di una distribuzione chi-quadro con df gradi di libertà.
- ▶ $df = 1$ per intervalli di confidenza pointwise, $df = \#\psi$ per intervalli congiunti.

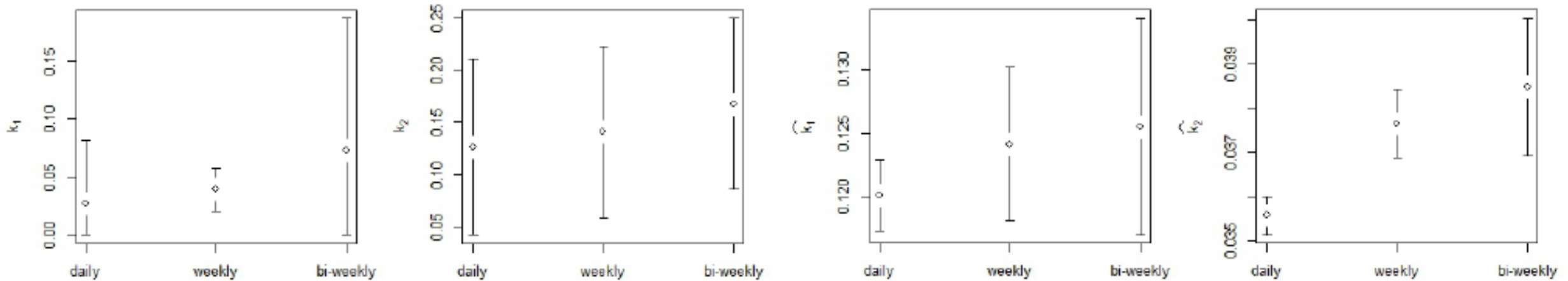


Framework di validazione – Intervalli di confidenza asintotici



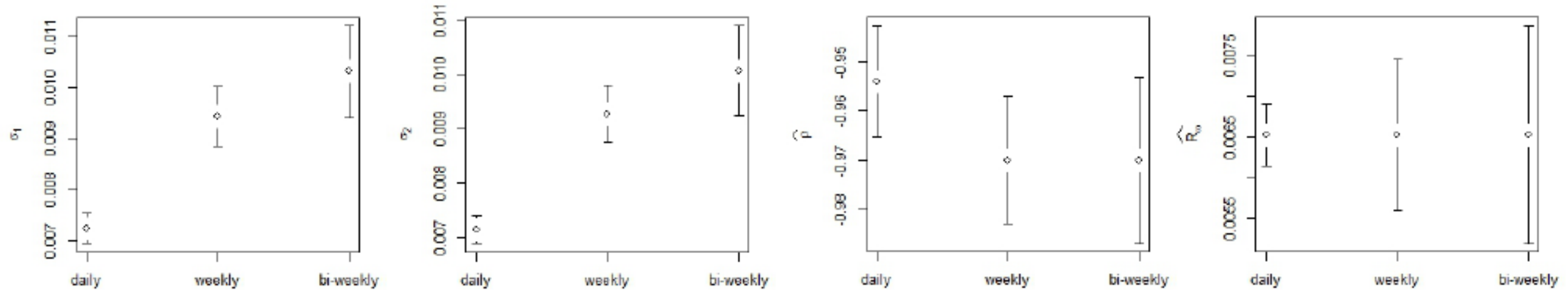
- ▶ Tutti gli intervalli di confidenza sono pointwise e si riferiscono ad un livello di confidenza del 95%.
- ▶ **Gli intervalli di confidenza sono generalmente compatibili** al variare del timestep di proiezione, dimostrando che il framework di calibrazione è robusto nella stima dei parametri.
- ▶ La maggior parte dei parametri mostra intervalli più ampi al diminuire dei dati a disposizione, mostrando una maggiore incertezza nella stima quando sono disponibili meno informazioni.

Framework di validazione – Intervalli di confidenza asintotici



- ▶ Tutti gli intervalli di confidenza sono pointwise e si riferiscono ad un livello di confidenza del 95%.
- ▶ **Gli intervalli di confidenza sono generalmente compatibili** al variare del timestep di proiezione, dimostrando che il framework di calibrazione è robusto nella stima dei parametri.
- ▶ La maggior parte dei parametri mostra intervalli più ampi al diminuire dei dati a disposizione, mostrando una maggiore incertezza nella stima quando sono disponibili meno informazioni.

Framework di validazione – Intervalli di confidenza asintotici



- ▶ Tutti gli intervalli di confidenza sono pointwise e si riferiscono ad un livello di confidenza del 95%.
- ▶ **Gli intervalli di confidenza sono generalmente compatibili** al variare del timestep di proiezione, dimostrando che il framework di calibrazione è robusto nella stima dei parametri.
- ▶ La maggior parte dei parametri mostra intervalli più ampi al diminuire dei dati a disposizione, mostrando una maggiore incertezza nella stima quando sono disponibili meno informazioni.

Conclusioni

- ▶ Le analisi effettuate dimostrano che il modello replica i dati di mercato *in sample* in modo soddisfacente e proietta *out of sample* in modo simile a quanto prevede la *standard formula* di Solvency II.
- ▶ La presenza di **massimi locali** è stata ampiamente discussa dimostrando che sono principalmente dovuti a soluzioni degenerate del problema di ottimizzazione che possono essere evitate includendo un vincolo aggiuntivo sul parametro di correlazione ρ nella procedura di calibrazione.
- ▶ Il risultato ottenuto inizialmente per y_∞ (**uguale a -1.1%**) è **in linea con il comportamento empirico** delle intensità di rendimento a scadenza osservate sul mercato, ma è discutibile da un punto di vista economico.
- ▶ Le analisi di sensitivity con diverse profondità della serie storica hanno evidenziato che il modello è **lontano dal trovare valori di y_∞ che siano vicini all'UFR** previsto da Solvency II.
- ▶ Al fine di controllare l'estrapolazione della struttura delle intensità di rendimento a scadenza, un **ulteriore vincolo su y_∞** è stato incluso, in linea con il livello dei tassi di lungo periodo osservato su base storica nei 5 anni precedenti al 2016. Il modello finale è stato infine verificato attraverso l'applicazione di molteplici test di validazione e analisi.
- ▶ I test di validazione **escludono la presenza di distorsioni e una dipendenza rilevante dai parametri iniziali**.
- ▶ Inoltre, **gli intervalli di confidenza asintotica derivati per tutti i parametri del modello sono generalmente compatibili** al variare del timestep di proiezione del *Kalman filter*, dimostrando la robustezza del framework di calibrazione.
- ▶ Finora, **il modello sembra essere appropriato per essere utilizzato ai fini Solvency II**.



Bibliografia

- Simon H. Babbs and K. Ben Nowman. Kalman filtering of generalized vasicek term structure models. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 34, 2001.
- D. Bauer, D Bergmann, and A. Reuss. Solvency ii and nested simulations - a least-squares monte carlo approach. *Preprint Series*, 2009.
- M. Bianchetti and M. Morini. *Interest Rate modelling after financial crisis*. Risk books, 2013.
- M.L. Bianchi. An empirical comparison of alternative credit default swap pricing models. *Bank of Italy Working Papers*, 882, 2012.
- F. Black. The pricing of commodity contracts. *Journal of financial economics*, 3(1-2):167–179, 1976.
- F. Black and M. Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81, 1973.
- D.J. Bolder. Affine term-structure models: Theory and implementation. *Bank of Canada Paper 2001-15*, 2001.
- A. Brace, D. Gatarek, and M. Musiela. The market model of interest rate dynamics. *Mathematical Finance*, 7, 1997.
- M. Brennan and E. Schwartz. A continuous time approach to the pricing of bonds. *Journal of Banking & Finance*, 3(2):133–155, 1979.
- D. Brigo and F. Mercurio. *Interest Rate Models: Theory and Practice - With Smile, Inflation and Credit, 2nd Edition*. Springer, 2006.
- G. Castellani, M. De Felice, and F. Moriconi. *Manuale di Finanza 3*. Il Mulino, 2012.
- R. Chen and L. Scott. Multi-factor cox-ingersoll-ross models of the term structure: Estimates and tests from a kalman filter model. *Journal of Real Estate Finance and Economics*, 27, 2003.
- J. Cox, J. Ingersoll, and S. Ross. An intertemporal general equilibrium model of asset prices. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, pages 363–384, 1985a.
- J. Cox, J. Ingersoll, and S. Ross. A theory of the term structure of interest rates. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, pages 385–407, 1985b.
- M. De Felice and F. Moriconi. *Una nuova finanza d'impresa: Le imprese di assicurazione, Solvency II, le Autorità di vigilanza*. Il Mulino, 2011.
- G.R. Duffee. Term premia and interest rate forecasts in affine models. *The Journal of Finance*, 57, 2002.
- J. Durbin and S. J. Koopman. *Time Series Analysis by State Space Methods*. Oxford University Press, 2012.



Bibliografia

- EIOPA. Guidelines on the valuation of technical provisions. Technical report, 2014.
- EIOPA. Technical documentation of the methodology to derive eiopa's risk-free interest rate term structures. Technical report, 2017.
- European Commission. European commission delegated regulation 2015/35. *Official Journal of the European Union*, 2015.
- European Parliament and Council. Omnibus ii directive 2014/51. *Official Journal of the European Union*, 2014.
- European Parliament and Council of the European Union. Solvency ii directive 138/2009. *Official Journal of the European Union*, 2009.
- H. Fong and O. Vasicek. Fixed-income volatility management. *The Journal of Portfolio Management*, 17(4):41–46, 1991.
- P. Glasserman. *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*. Springer, 2003.
- N. J. Gordon, D. J. Salmond, and A. F. M. Smith. Novel approach to nonlinear/non-gaussian bayesian state estimation. In *IEE Proceedings F (Radar and Signal Processing)*, volume 140, pages 107–113. IET, 1993.
- M. S. Grewal and A. P. Andrews. *Kalman Filtering Theory and Practice Using MATLAB*. John Wiley and Sons, 2001.
- D. Heath, D.A. Jarrow, and A. Morton. Bond pricing and the term structure of interest rates: a discrete time approximation. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 25, 1990.
- T.S.J. Ho and S.B. Lee. Term structure movement and pricing interest rate contingent claims. *Journal of Finance*, 41, 1986.
- J. Hull and A. White. Pricing interest-rate-derivative securities. *The Review of Financial Studies*, 3(4):573–592, 1990.
- J. Hull and A. White. Numerical procedures for implementing term structure models: Two factor models. *The Journal of Derivatives*, 2, 1994.
- R. E. Kalman. A new approach to linear filtering and prediction problems. *Journal of basic Engineering*, 82(1):35–45, 1960.
- G. Kitagawa. Monte carlo filter and smoother for non-gaussian nonlinear state space models. *Journal of computational and graphical statistics*, 5(1):1–25, 1996.
- L. Krippner. *Zero lower bound term structure modeling*. Palgrave Macmillan, 2015.
- A. Lageras and M. Lindholm. Issues with the smith-wilson method. Technical report, 2016.
- M. Lindholm and H. Andersson. On the relation between the smith-wilson method and integrated ornstein-uhlenbeck processes. 2013.



Bibliografia

- F. Longstaff and E. Schwartz. Interest rate volatility and the term structure: A two-factor general equilibrium model. *The Journal of Finance*, 47 (4):1259–1282, 1992.
- E. McCoy and U. Clemens. A calibration of the shadow rate to the euro area using genetic algorithms. *European central Bank Discussion Paper*, 51, 2017.
- L. A. McGee and S. F. Schmidt. Discovery of the kalman filter as a practical tool for aerospace and industry. 1985.
- J.A. Nelder and R. Mead. A simplex method for function minimization. *Comput. J.*, 7, 1965.
- A. Raue, C. Kreutz, T. Maiwald, J. Bachmann, M. Schilling, U. Klingmuller, and J. Timmer. Structural and practical identifiability analysis of partially observed dynamical models by exploiting the profile likelihood. *Bioinformatics*, 25, 2009.
- A. Smith and T. Wilson. Fitting yield curves with long term constraints. Technical report, Technical report, 2001.
- O. Vasicek. An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of Financial Economics*, 5, 1977.
- E. A. Wan and R. Van Der Merwe. The unscented kalman filter for nonlinear estimation. *Adaptive Systems for Signal Processing, Communications, and Control Symposium 2000. AS-SPCC. The IEEE 2000*, pages 153–158, 2000.
- N. Wiener. *Extrapolation, interpolation, and smoothing of stationary time series*, volume 7. MIT press Cambridge, 1949.

