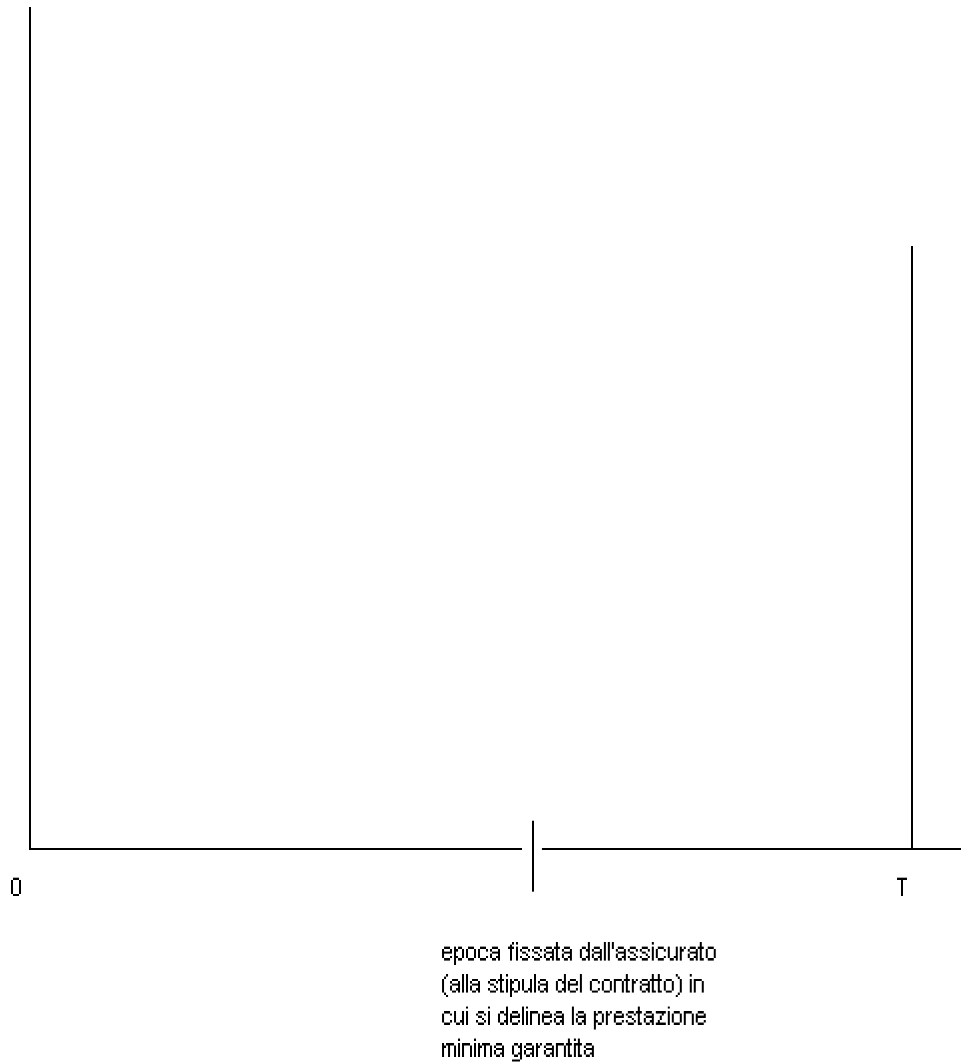
Polizze Unit Linked con prestazioni minime garantite di tipo europeo che si delineano nel corso della durata contrattuale

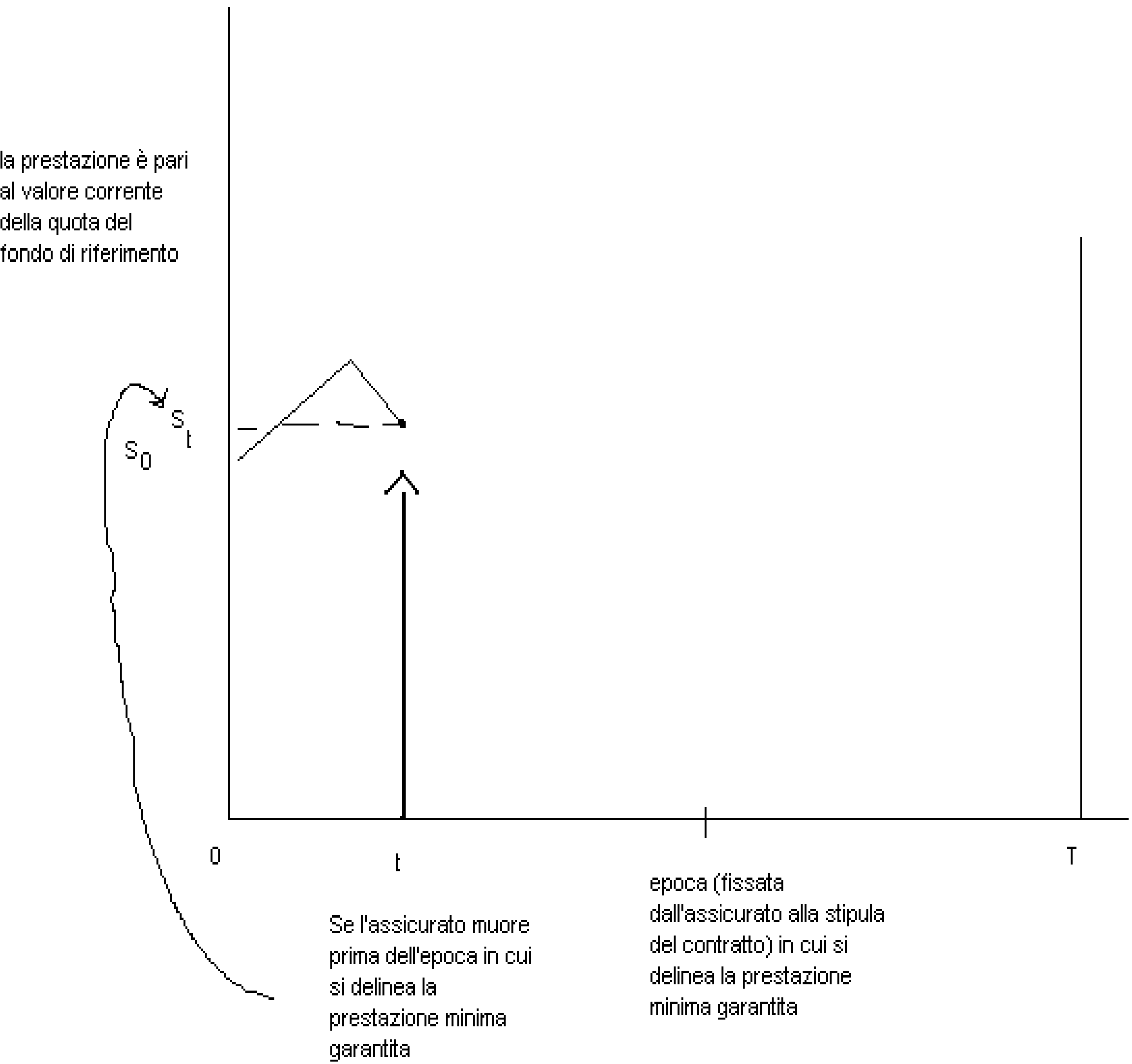
Emanuele Vannucci
Dipartimento di Statistica e Matematica Applicata all'Economia
Università di Pisa

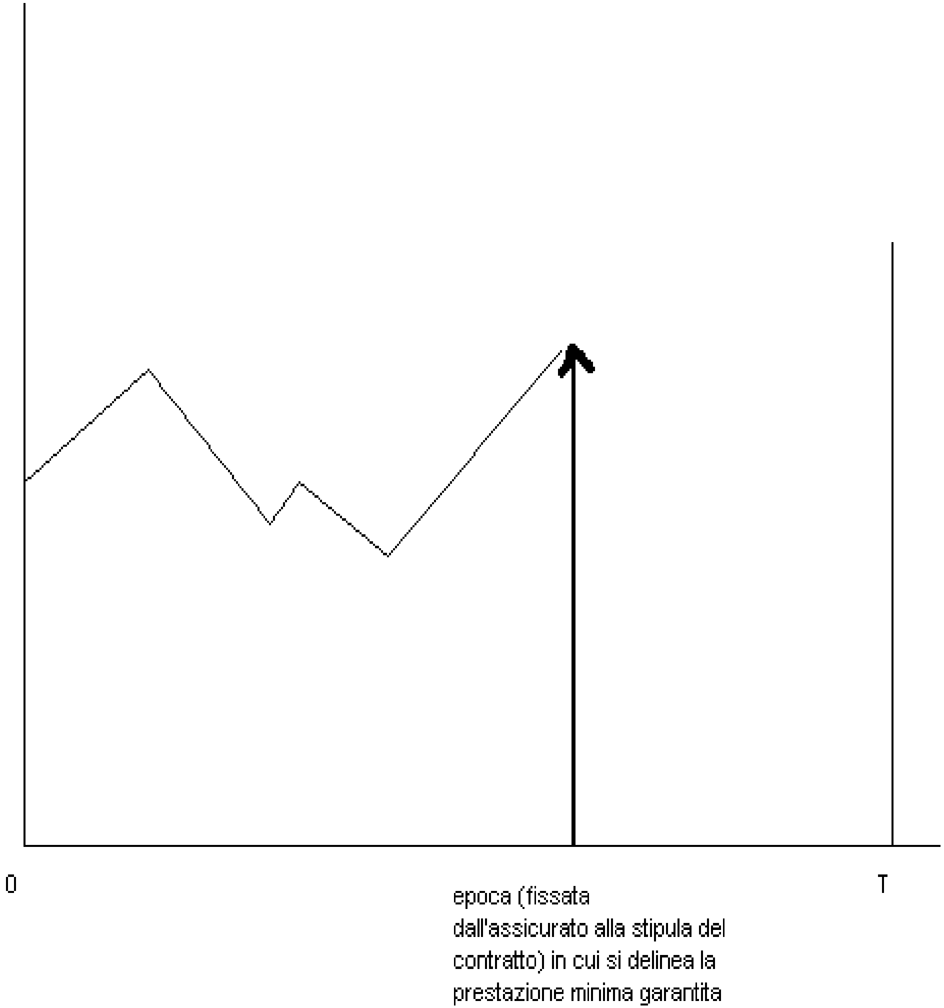
emanuele.vannucci@ec.unipi.it

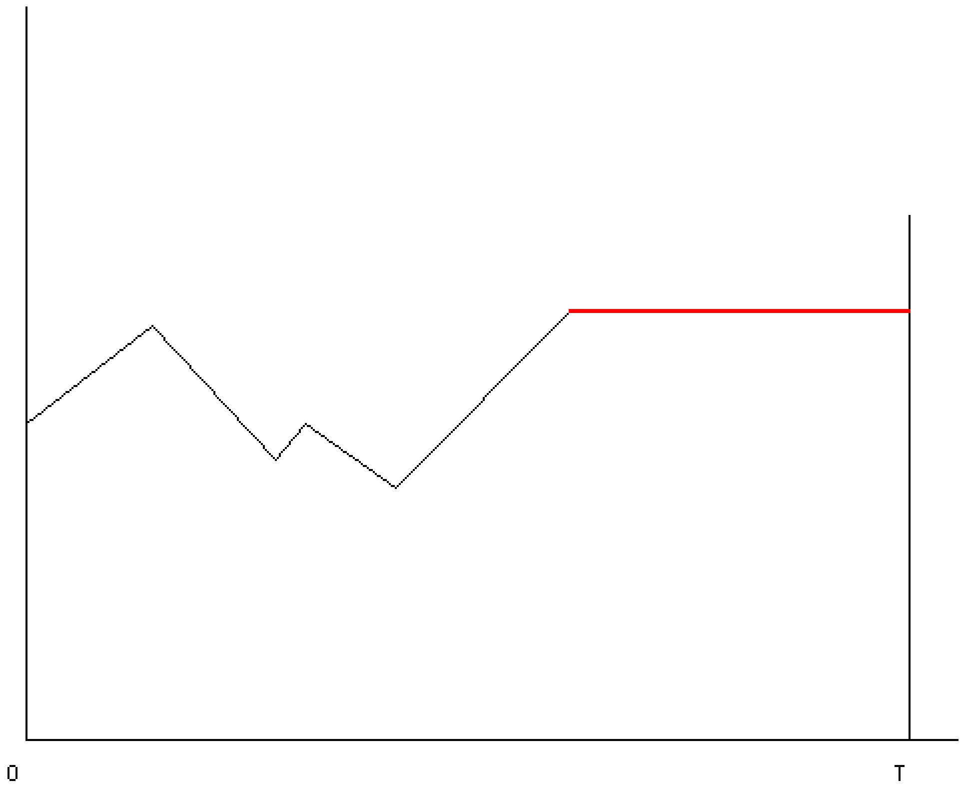
Schema della presentazione

- Descrizione del prodotto
- Lo scenario demografico-finanziario
- Il modello di valutazione
- Esempi numerici
- Considerazioni conclusive

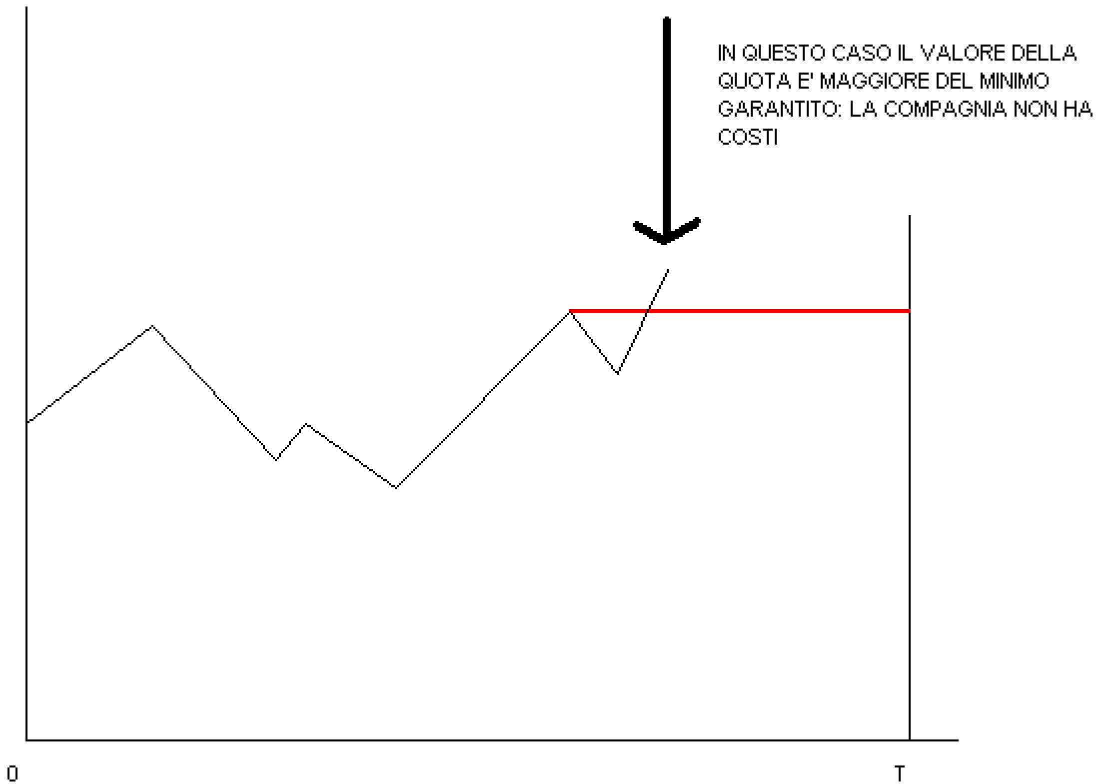

0
T
epoca fissata dall'assicurato
(alla stipula del contratto) in
cui si delinea la prestazione
minima garantita

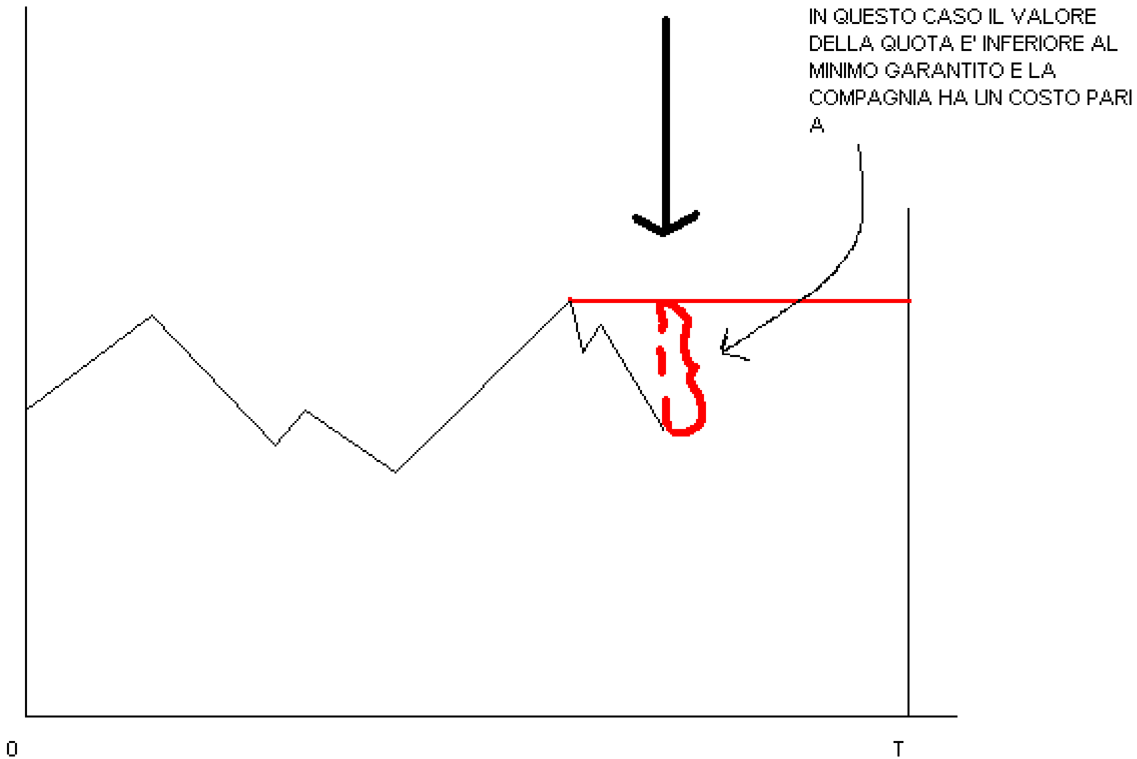

la prestazione è pari
al valore corrente
della quota del
fondo di riferimento
S_t
S_0
0
t
T
Se l'assicurato muore
prima dell'epoca in cui
si delinea la
prestazione minima
garantita
epoca (fissata
dall'assicurato alla stipula
del contratto) in cui si
delinea la prestazione
minima garantita


0
T
epoca (fissata
dall'assicurato alla stipula del
contratto) in cui si delinea la
prestazione minima garantita


0
T

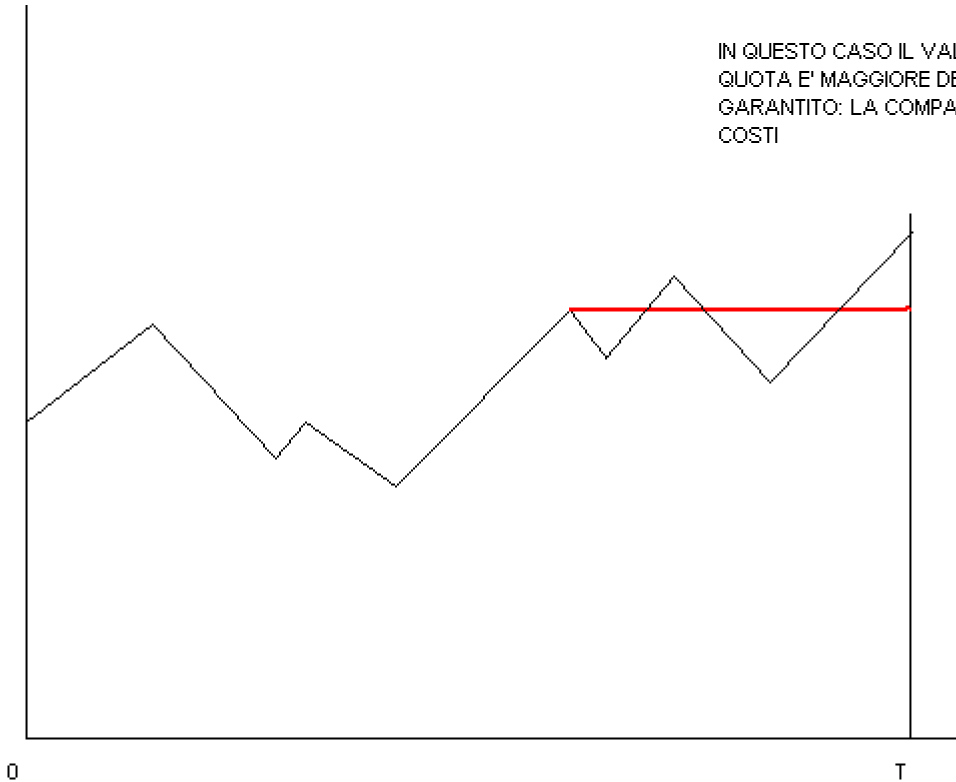
IL CONTRATTO PROSEGUE
O FINO AL DECESSO DELL'ASSICURATO...

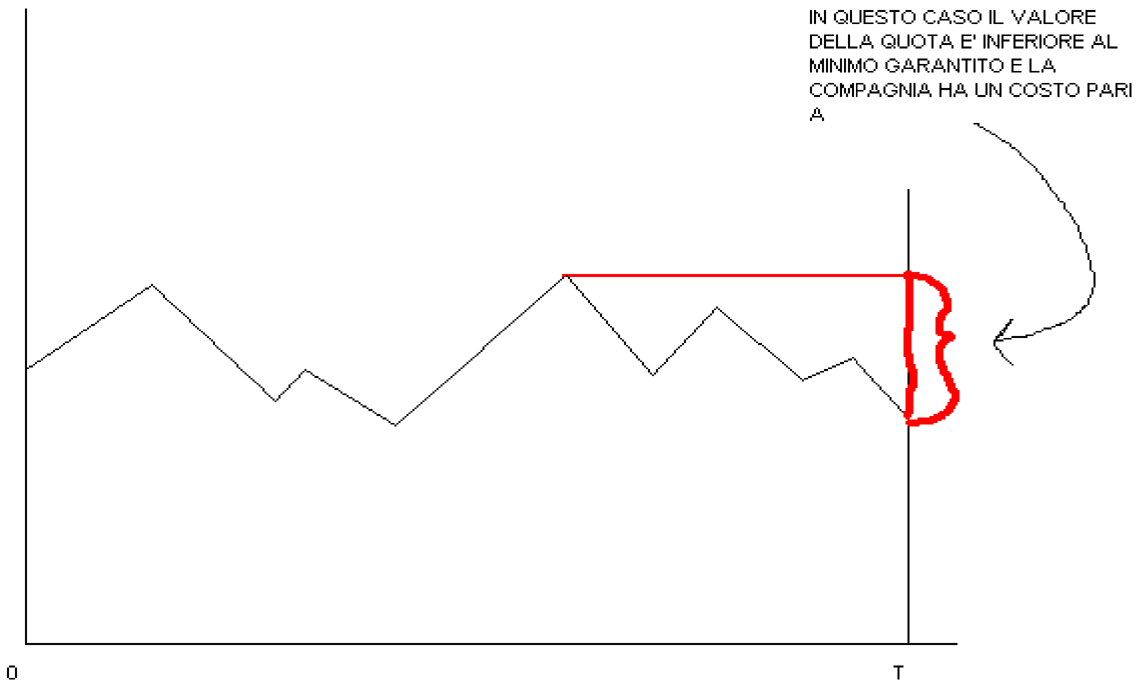



IN QUESTO CASO IL VALORE DELLA QUOTA E' INFERIORE AL MINIMO GARANTITO E LA COMPAGNIA HA UN COSTO PARI A
0
T

O IL CONTRATTO PROSEGUE FINO A SCADENZA

IN QUESTO CASO IL VALORE DELLA QUOTA E' MAGGIORE DEL MINIMO GARANTITO: LA COMPAGNIA NON HA COSTI




IN QUESTO CASO IL VALORE DELLA QUOTA E' INFERIORE AL MINIMO GARANTITO E LA COMPAGNIA HA UN COSTO PARI A
0
T

Scenario demografico

L'intervallo temporale di riferimento $[0,T]$ è diviso in n intervalli tutti della stessa ampiezza Δ: così è $n\Delta=T$.

q_h, $h=1,2,...,n$, probabilità di decesso nell'h-esimo periodo, $((h-1)\Delta,h\Delta]$: in particolare si assume che il decesso avvenga esattamente all'epoca $(h-1/2)\Delta$

$\beta_h=1-q_1-q_2-...-q_h$, $h=1,2,...,n$, probabilità di sopravvivenza fino all'epoca $h\Delta$

$q_{h+k,h}=q_{h+k}/\beta_h$, $k=1,2,...,n-h$, probabilità di decesso nei successivi n-h periodi $((h+k-1)\Delta,(h+k)\Delta]$ se l'assicurato è vivo all'epoca $h\Delta$, $h=1,2,...,n-1$

$\beta_{h+k,h}=1-q_{h+1,h}-q_{h+2,h}-...-q_{h+k,h}$, $k=1,2,...,n-h$, probabilità di sopravvivenza fino all'epoca $(h+k)\Delta$ se in vita all'epoca $h\Delta$

Scenario finanziario

$=(1+r)^{-\Delta}$ fattore di sconto per un periodo di ampiezza Δ, r è orrispondente tasso di valutazione annuo.

potesi degli alberi binomiali ricombinanti: la distribuzione dell uotazione aleatoria dell'unità all'epoca $h\Delta$, S_h, $h=1,2,...,n$, è binomiale eometrica caratterizzata dai parametri p,h,u,d, con u>d e con p" (0,1).

osto $S_0=1$, è pertanto per $i=0,1,...,h$, $P(S_h = s_{h,i} = u^i d^{h-i}) = \binom{h}{i} p^i(1-p)^{h-i}$

Nello scenario Black-Scholes le variabili aleatorie $\log(S_h/S_{h-1})$, per $=1,2,...,n$, sono i.i.d. con distribuzione normale di media $\mu\Delta$ e scarto uadratico medio $\sigma\Delta^{1/2}$. Una valorizzazione dei parametri p, u e d, che produce alcune delle condizioni dello scenario Black-Scholes (in articolare i primi due momenti della variabile aleatoria S_h) si ottiene isolvendo il seguente sistema

$$\begin{cases} up + d(1-p) = \exp((\mu + \sigma^2/2)\Delta) \\ u^2 p + d^2(1-p) = \exp(2(\mu + \sigma^2)\Delta) \\ p = 0.5 \\ u > d \end{cases}$$

Lo schema delle prestazioni

ia $h^*\Delta$ con $h^* \in \{0,1,...,n\}$, l'epoca in cui il valore corrente dell'unità $_{h^*,i}$ con $i=0,1,\ldots,h^*$, diviene la prestazione minima garantita.

a prestazione prevista contrattualmente è

$\mathbf{S_{h-1}}$, $h=1,2,...,h^*$ se l'assicurato muore prima dell'epoca $h^*\Delta$, nell'intervallo $((h-1)\Delta,h\Delta]$

$\mathbf{max(S_{h-1},s_{h^*,i})}$, $h=h^*+1$, h^*+2, ..., n, se l'assicurato muore dop l'epoca $h^*\Delta$, nell'intervallo $((h-1)\Delta,h\Delta]$

$\mathbf{max(S_n,s_{h^*,i})}$, se l'assicurato sopravvive fino a scadenza

Oss. Nel caso in cui l'assicurato muore dopo l'epoca $h^*\Delta$, vale per $= h^*\Delta +1, h^*\Delta +2,..., n+1$

$$\max(S_{h-1},s_{h^*,i}) = s_{h^*,i} + \max(S_{h-1}-s_{h^*,i},0)$$

$\max(S_{h-1}-s_{h^*,i},0)$ è la prestazione di una opzione di tipo call europe tipulata all'epoca 0 con scadenza all'epoca $(h-1-h^*)\Delta$, con prezzo d sercizio $s_{h^*,i}$ e con valore del sottostante alla stipula dell'opzione ugual l prezzo di esercizio (opzione cosiddetta “at the money“).

l valore atteso della prestazione dopo che la prestazione minima arantita si è delineata

issati i parametri μ, σ e r, sia C(s,j) il valore atteso all'epoca 0 di una all cosiddetta "at the money" con prezzo di esercizio pari a s e con cadenza all'epoca jΔ (C(s,j) è lineare rispetto alla variabile s).

potizzando che il decesso dell'assicurato nell'intervallo ((h-1)Δ,hΔ], on h=1, 2, ..., n, avvenga all'epoca (h-1/2)Δ e assumendo che la restazione prevista in caso di decesso sia immediatamente liquidata, il alore atteso della prestazione all'epoca h*Δ nell'ipotesi in cui $s_{h*,i}$ sia la restazione minima garantita fissata a tale epoca, $M(s_{h*,i},h*)$ è dato da anche M(s,h*) è lineare rispetto alla variabile s)

$$M(s_{h*,i}, h*) = s_{h*,i} M(1, h*) = s_{h*,i}\left(1 + v^{1/2}\sum_{j=1}^{n-h*} q_{h*+j,h*}C(1, j-1) + \beta_{n,h*}C(1, n-h*\right.$$

Il valore atteso della prestazione

'enendo anche conto della possibilità che l'assicurato muoia prim ell'epoca $h^*\Delta$, il valore atteso della prestazione all'epoca 0, $W(h^*)$ co nfatizzazione della scelta dell'epoca $h^*\Delta$ da parte dell'assicurato, è dat a

$$W(h^*) = \sum_{j=1}^{h^*} q_j v^{j-1/2} E\left[S_{j-1}\right] + \beta_{h^*}\, v^{h^*} E\left[S_{h^*}\right] M(1, h^*)$$

Jn assicurato perfettamente razionale e massimizzatore del valore attes ella prestazione, sceglierà h^*_{ott} tale che

$$W(h^*_{ott}) \equiv \max_{h^* \in \{0,1,\ldots,n\}} W(h^*)$$

Dss. A $h^*=n$ e a $h^*=0$ corrispondono rispettivamente i casi di polizz Jnit Linked senza rendimenti minimi garantiti e con rendimento minim arantito (pari a 0) definito alla stipula del contratto.

Esempi numerici: la parametrizzazione standard

età=50, $T=10$, $\Delta=1/2$, $\mu=0.03$, $\sigma=0.2$, $r=0.05$

I risultati al variare di h*

h*	W(h*)	h*	W(h*)	h*	W(h*)
0	1.0711	7	1.0816	14	1.0867
•	1.0756	8	1.0851	15	1.0851
•	1.0744	9	1.0817	16	1.0811
•	1.0782	10	1.0873	17	1.0822
•	1.0784	11	1.0820	18	1.0666
•	1.0803	12	1.0881	19	1.0714
•	1.0820	13	1.0845	20	1.0137

Oss. Come c'era da aspettarsi il caso $h^*=20$, ovvero la polizza senza rendimento minimo garantito, dà luogo al più basso valore atteso della prestazione. Inoltre è $h^*_{ott}=12$.

I risultati al variare dei parametri: analisi di sensitività

	$W(h^*_{ott})$	h^*_{ott}
"standard"	1.0881	12
età=30	1.0887	12
età=70	1.0824	12
T=5	1.0820	2
T=15	1.0939	22
Δ=1	1.0917	7
Δ=1/3	1.0869	18
μ=0.02	0.9986	8
μ=0.04	1.1910	14
σ=0.15	0.9768	12
σ=0.25	1.2370	12
r=0.04	1.1972	12
r=0.06	0.9900	12

Commenti ai risultati numerici

Il valore atteso della prestazione è molto sensibile a variazioni dei parametri che caratterizzano lo scenario finanziario.

L'epoca in cui il valore corrente dell'unità diviene la prestazione minima garantita che massimizza il valore atteso della prestazione, si posiziona in molti casi un po' dopo la metà dell'intervallo temporale di riferimento.

Il posizionamento dell'epoca che massimizza il valore atteso della prestazione è molto sensibile a variazioni del rendimento atteso dell'attivo di riferimento, μ: se si riduce il valore di μ si ottengono valori più bassi di h^*, ovvero, **se peggiorano le prospettive sul rendimento atteso dell'attivo di riferimento conviene anticipare l'epoca di valorizzazione della prestazione minima garantita**!

Considerazioni conclusive

Possibili evoluzioni della polizza descritta in questo lavoro

- **prestazione minima garantita esigibile anche in caso di riscatto anticipato (garanzie di tipo americano)**

- **l'assicurato può fissare in un qualsiasi istante il valore corrente della quota come prestazione minima garantita** (sia con garanzie di tipo europeo che con garanzie di tipo americano)

- **possibile switch** in un fondo meno rischioso al momento della valorizzazione della prestazione minima garantita

Principali riferimenti bibliografici

Bacinello A.R., Ortu F. (1993); Pricing equity-linked life insurance with endogenous minimum-guarantees; Ins.: Math. and Ec., 12, pp. 245-257.

Bacinello A.R. (2002); Pricing Guaranteed Life Insurance Partecipating Policies with Periodical Premiums and Surrender Option; Quad. del Dip. di Mat. Appl. alle Sc. Ec. St. e Att. "Bruno. de Finetti", Univ. Degli studi di Trieste, n.1/2002.

Grosen A., Jorgensen P.L. (2000); Fair valuation of life insurance liabilities: The impact of interest rate guarantees, surrender options, and bonus policies; Insurance: Mathematics and Economics, 26, pp. 37-57.

Vannucci E. (1999); Un modello di valutazione del costo di garanzie di rendimenti minimi esigibili nel continuo e condizionate alla sopravvivenza; Giornale dell'Ist. Italiano degli Attuari, LXII, pp. 65-78.

Vannucci E. (2000), Le polizze Unit Linked con rendimenti minimi garantiti, cap. 3 del volume di Vannucci L., Statistica assicurativa e valutazioni attuariali, Pitagora editrice, Bologna.