

# Least Squares Monte Carlo

Tecniche di replicazione dei modelli di proiezione finanziaria

# Agenda

1. Il problema dei calcoli ALM
2. La metodologia LSMC
3. Benefici nell'uso dell'LSMC
4. Esempi
5. Domande & Risposte

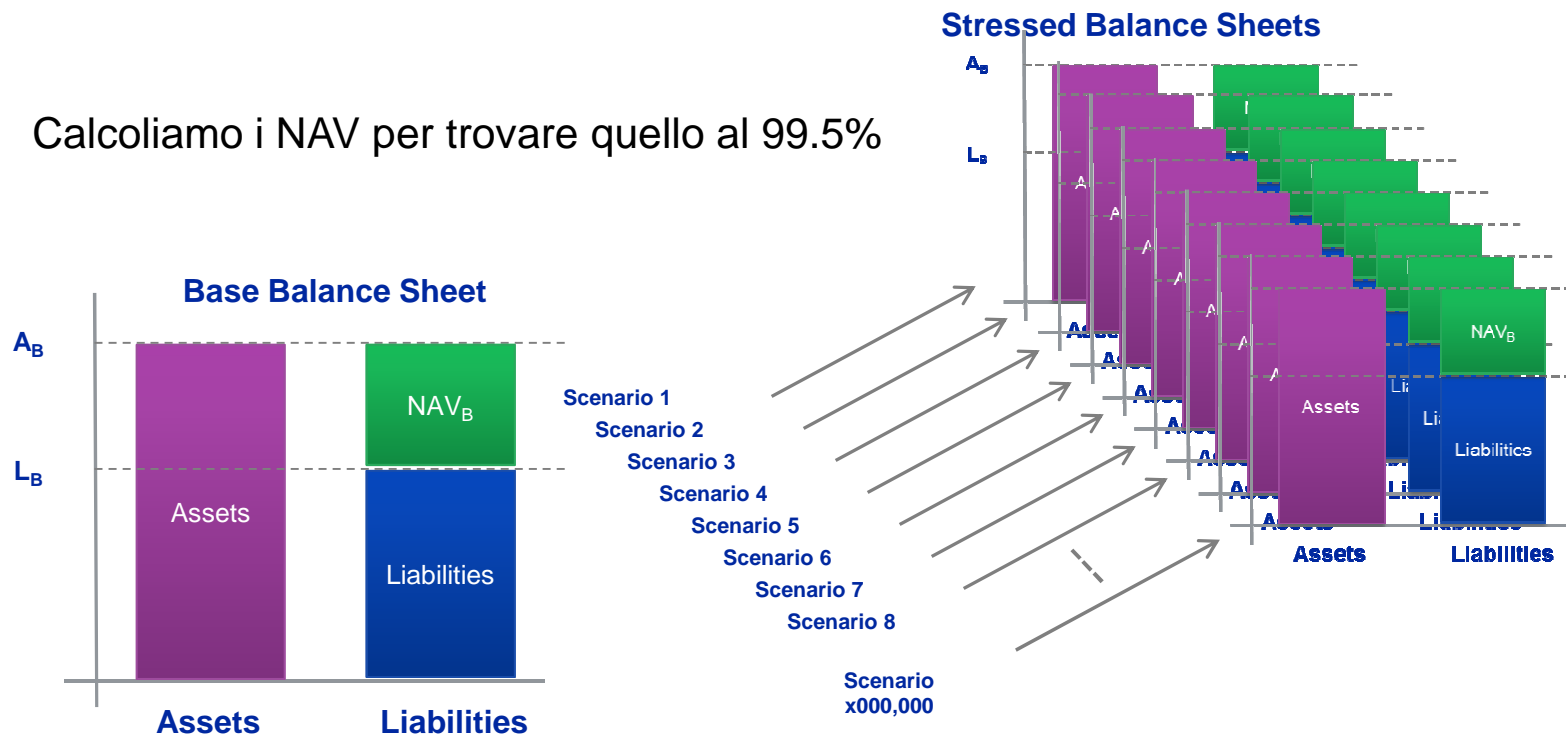
# 1

## Il problema dei calcoli ALM

## Il problema

- » Il calcolo del capitale e la valutazione dell'efficienza delle coperture (hedging) per passivi vita complessi richiedono la capacità di ri-eseguire rapidamente il modello ALM.
  - È improbabile che sia fattibile ricalcolare il capitale di rischio con una tecnica Monte Carlo utilizzando direttamente l'ALM
  - La valutazione intermedia di metriche tipo Assets/Liabilities, NAV o la MCEV può richiedere molto tempo e non può soddisfare le esigenze aziendali di business planning

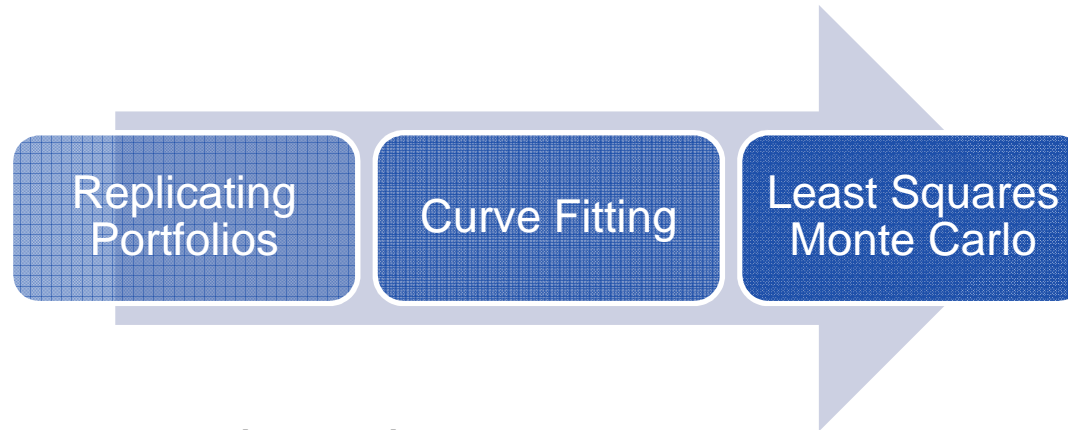
Calcoliamo i NAV per trovare quello al 99.5%



## Il problema

- » Molti passivi assicurativi hanno opzioni e garanzie complesse che sono *path dependent* (i cash flow dipendono dal cammino dei rendimenti degli attivi corrispondenti)
- » Di conseguenza, un'unica valutazione di tali passività richiede simulazioni Market Consistent (potenzialmente 1000-5000).
- » Generalmente l'infrastruttura tecnologica della maggior parte delle assicurazioni può richiedere molti giorni / settimane per il calcolo.
- » Nel contesto di un calcolo 1-year VaR del capitale le passività devono essere ricalcolate per centinaia di migliaia di differenti scenari 1-year VaR => trilioni di calcoli ( $10^9$ ).
- » Questo, in generale, non è praticabile per la maggior parte delle compagnie, di conseguenza sono state sviluppate un paio di tecniche con il fine di accelerare i calcoli.

## La soluzioni attuali



- » RP hanno perso popolarità perché:
  - difficile trovare Assets che 'replicano' Liabilities
  - non colgono i rischi non di mercato.
- » L'uso di funzioni polinomiali (funzioni di proxy) ha guadagnato terreno negli ultimi anni attraverso *Curve fitting* e *Least Squares Monte Carlo* (LSMC).
- » Una funzione polinomiale può essere calcolata molto rapidamente e quindi può essere utilizzata con tecniche Monte Carlo per applicazioni come:
  - calcolo del capitale di rischio,
  - valutazioni intermedie,
  - efficacia della copertura.

## I proxies si sostituiscono al motore ALM in vari casi



- » Una volta calibrate, le funzioni proxy saranno accurate per un periodo specifico. Questo dipende da diversi fattori.

# 2

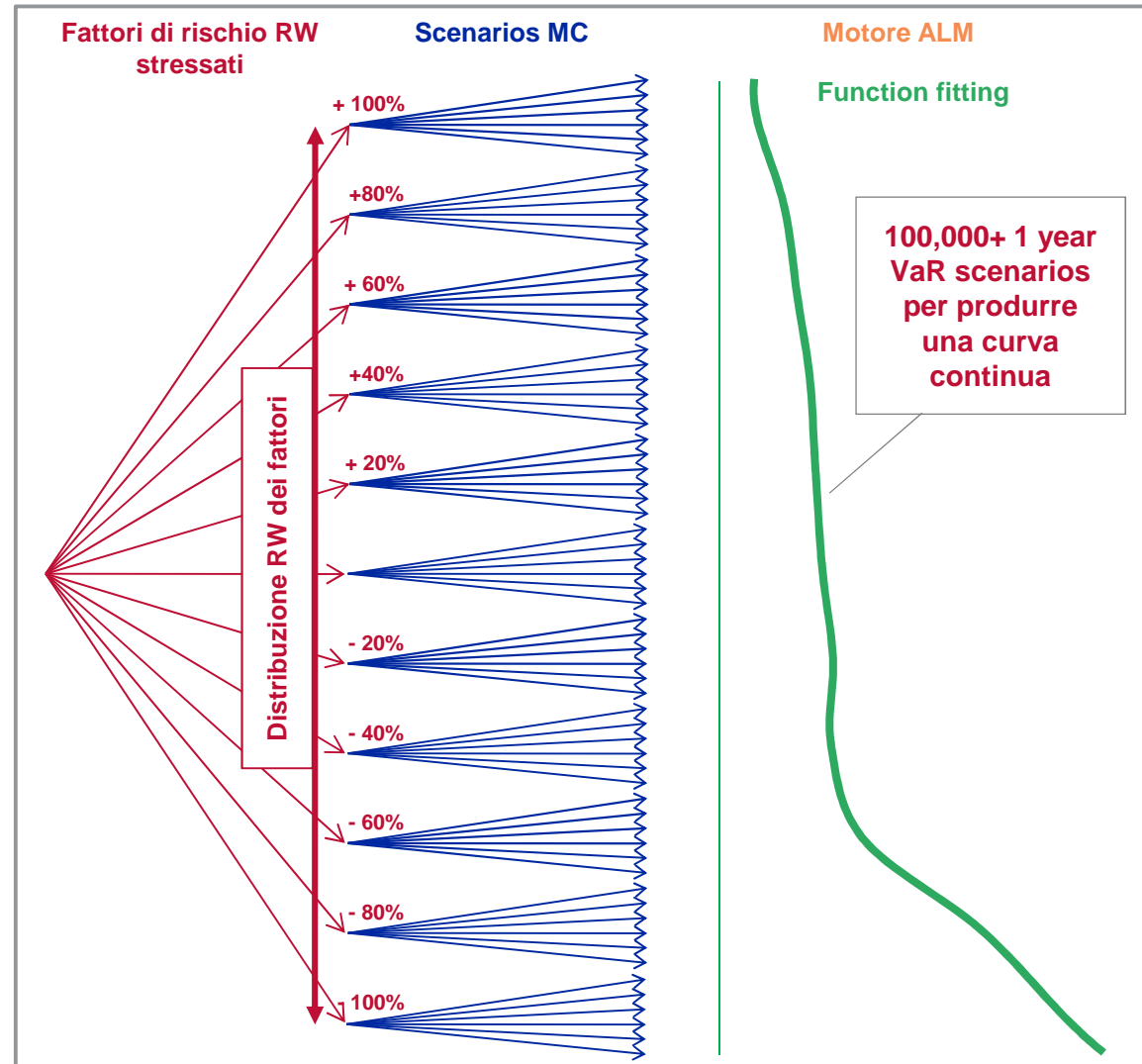
## Metodologia



# Approccio classico: Full Nested Stochastic

L'approccio FNS richiede (per ogni scenario stressato ad 1 anno) una serie completa di scenari di Market-Consistent

Quanti scenari richiede?	
1 year VaR Scenarios	100,000+
Market Consistent Scenarios	5,000
<b>Total</b>	<b>500,000,000+</b>

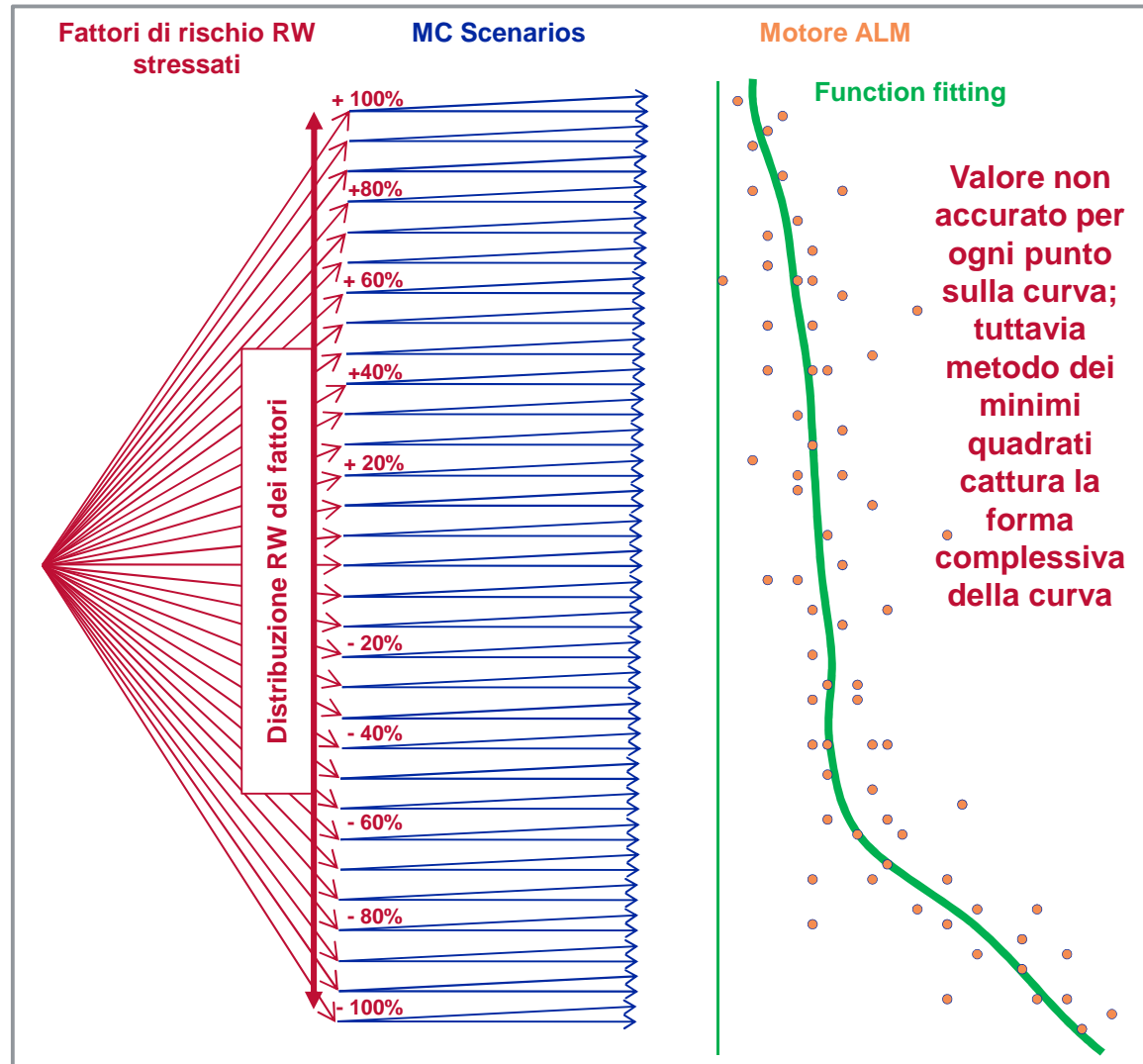


# La metodologia Least Squares Monte Carlo

L'approccio LSMC aumenta il numero di punti di fitting, ma riduce l'accuratezza delle valutazioni associate a causa del numero ridotto di scenari Market Consistent.

La chiave è che, fintanto che gli scenari Market Consistent sono indipendenti, il fit è molto meglio quello del Curve Fitting a parità di numero di scenari.

Quanti scenari richiede?	
1 year VaR Scenarios	50,000
Market Consistent Scenarios	2
<b>Total</b>	<b>100,000</b>

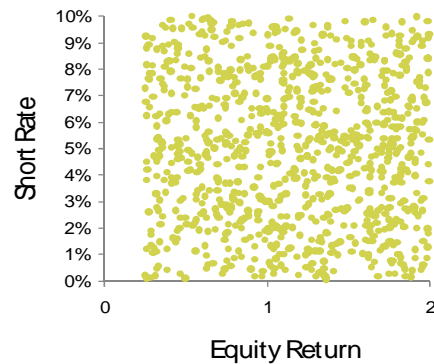


# Processo per ottenere i funzioni polinomiali con LSMC

» Esistono 4 principali processi per ottenere un proxy con LSMC

**1. Identificare i rischi e generare scenari stressati**

Step 1



**2. Calcolare i Asset e Liabilities attualizzati per ogni stress**

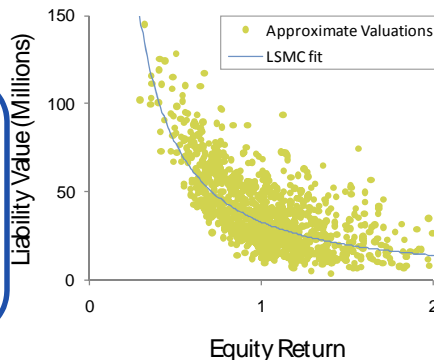
**Motore ALM**

Step 2



**3. Ottimizzazioni del fit della funzione LSMC per i Assets e Liabilities**

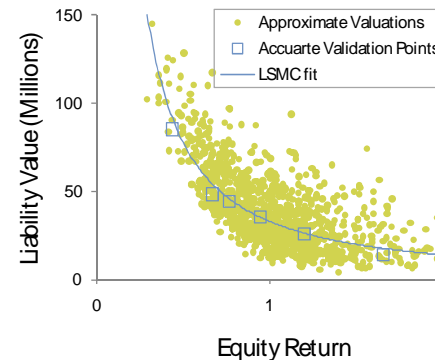
Step 3



**4. Validazione delle funzioni proxies usando un run full stocastic**

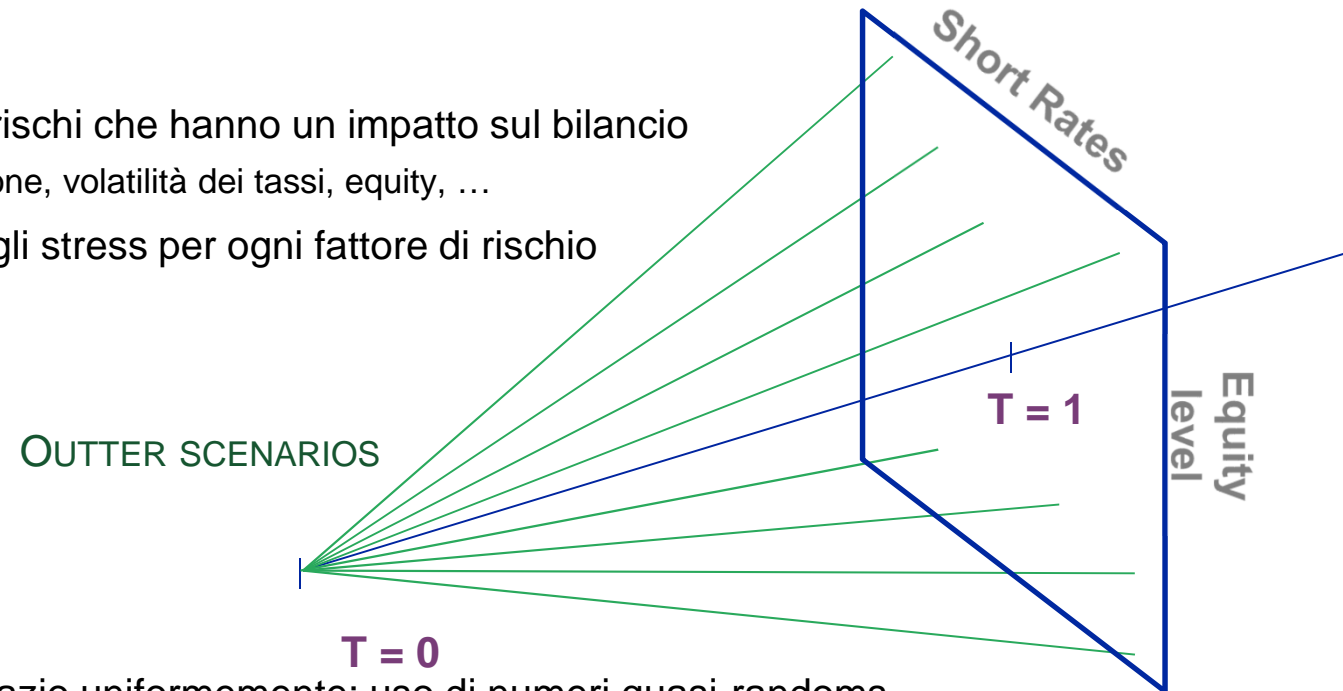
**Motore ALM**

Step 4



## Passo 1a: Identificare i rischi e la loro gamma nello spazio di Fitting

- » Identificare i fattori di rischi che hanno un impatto sul bilancio
  - Tassi nominali, inflazione, volatilità dei tassi, equity, ...
- » Definire la gamma degli stress per ogni fattore di rischio

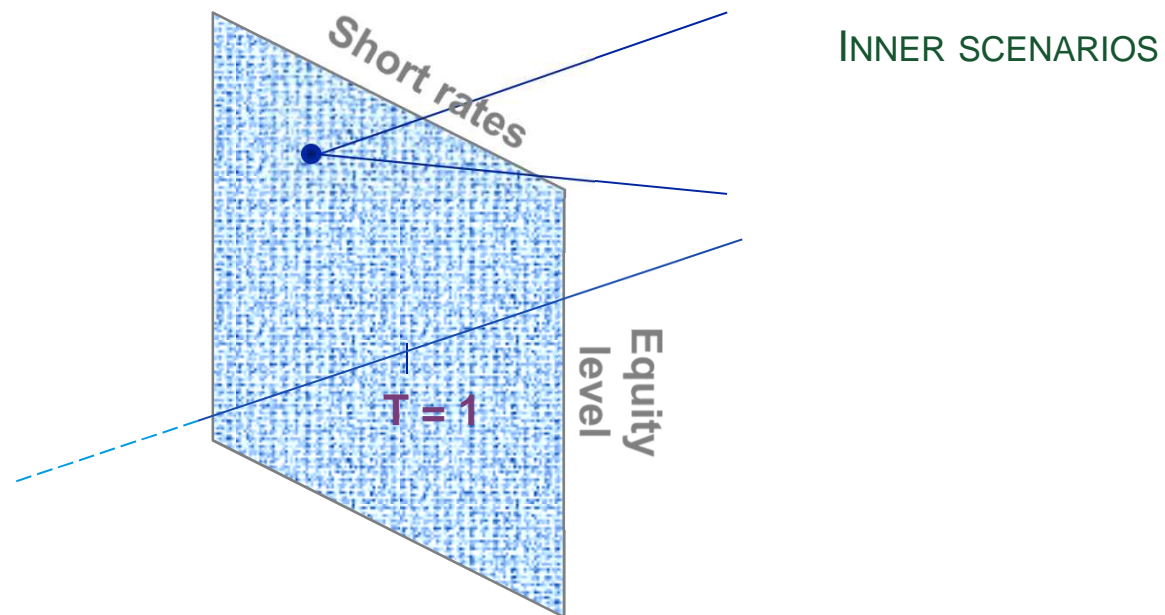


- » Ottimizzare questo spazio uniformemente: uso di numeri quasi-randoms
  - Bassa discrepanza
  - Coprire tutte le situazioni possibili
  - Per migliorare la densità dei punti nello spazio, usiamo la tecnica di Sobol

Source: Cathcart, M. (2012), *Monte Carlo simulation approaches to the valuation and risk management of unit-linked insurance products with guarantees*, Heriot-Watt University PhD thesis.

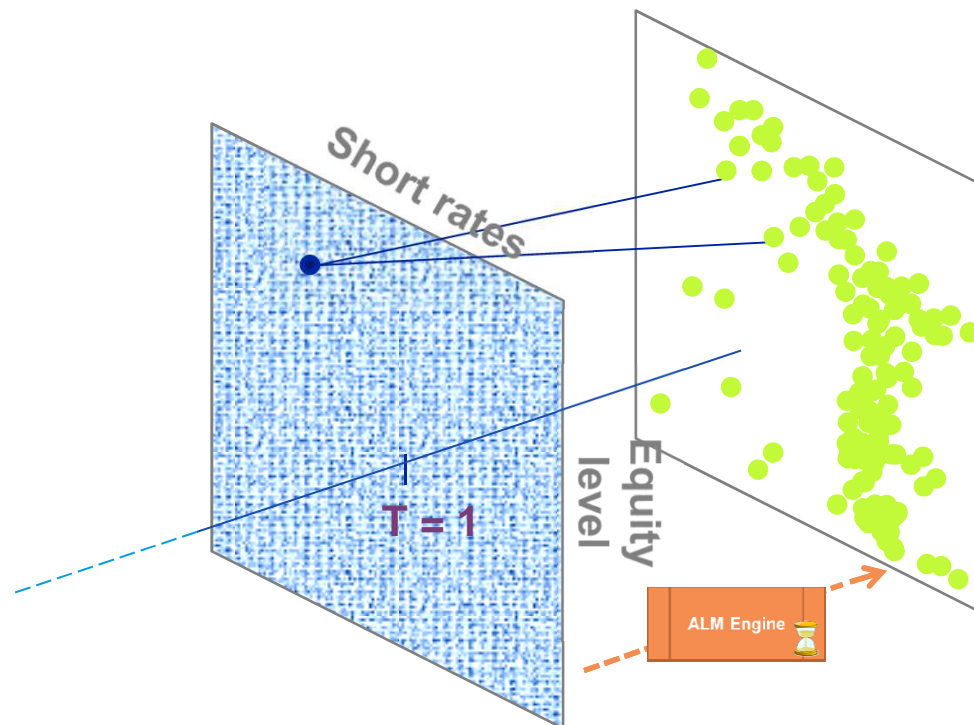
## Passo 1b : calibrare i modelli nel nuovo spazio e generare gli scenari

- » Ricalibrare ogni modello stocastico
  - Tassi nominali, tassi reali, inflazione, equity, credit, ...
- » Progettare gli scenari Market Consistent con la tecnica di riduzione della varianza delle coppie antitetiche
- » Aggregare gli scenari



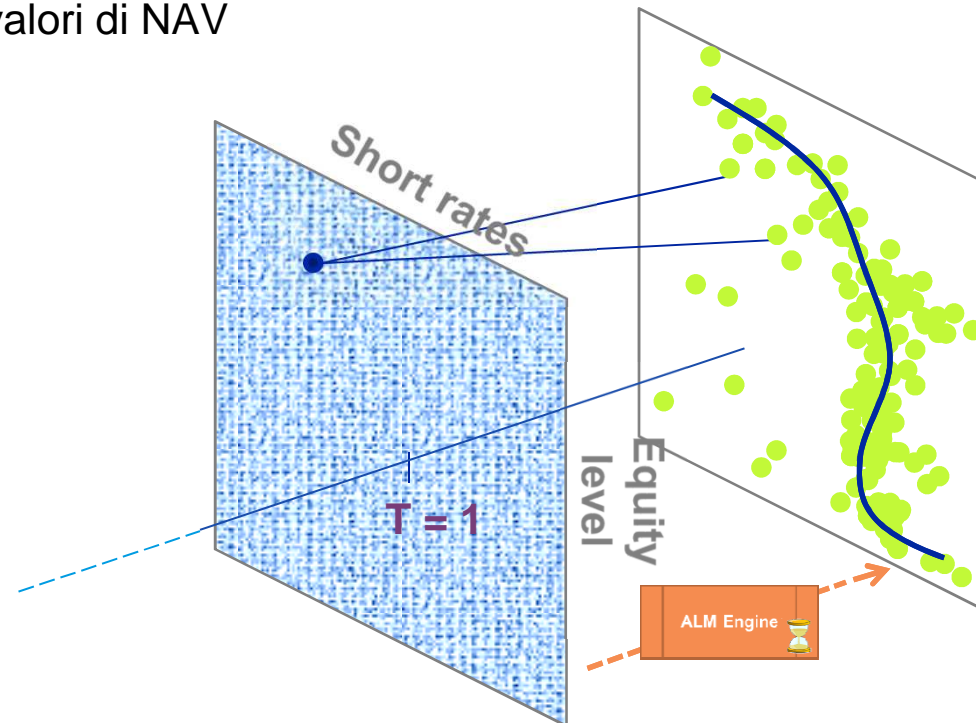
## Passo 2: eseguire gli scenari nel motore ALM

- » Ottenere un valore della NAV per ciascun punto di fitting facendo la media per ogni coppia antitetica del valore attuale dei flussi



## Passo 3: eseguire l'algoritmo di regressione

- » Ottenere ad una funzione di proxy eseguendo una regressione sui punti di fitting e la loro corrispondenti valori di NAV

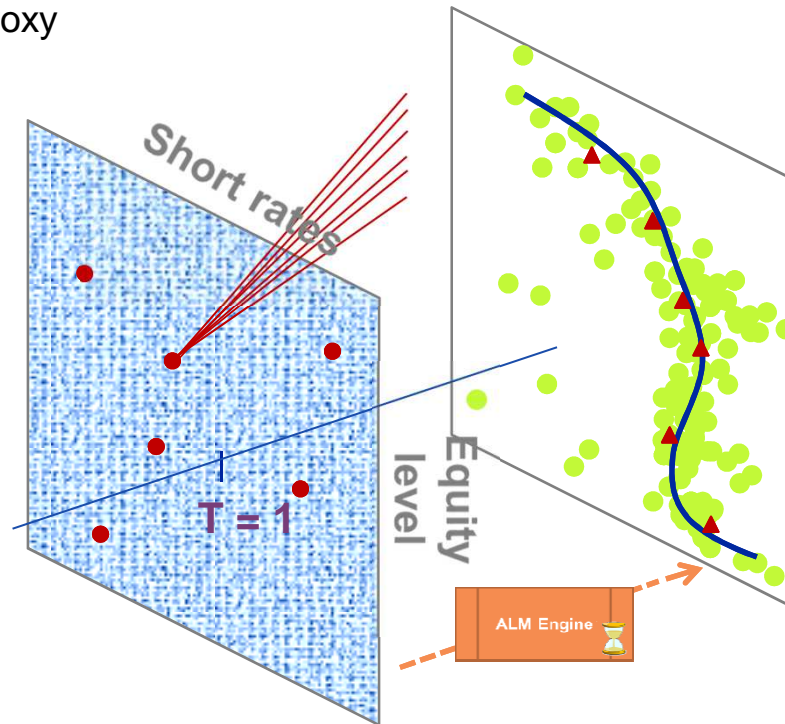


$$NAV = a + b.RF_1 + c.RF_2 + \dots + k.RF_1^2.RF_3 + \dots$$

*a, b, c... costanti. RFx rappresentano i fattori di rischio*

## Passo 4: convalidare il proxy

- » Convalidare il fit della funzione proxy :
  - Osservando le statistiche di regressione
  - Confrontandoli con i valori effettivi degli scenari di validazione (MC): scenari estremi o medio per verificare la qualità del fit del proxy
  - Bootstrapping





## Focus sulla convalida

- A. Una tecnica per valutare gli standard errors intorno alla funzione proxy è il "bootstrap".
  - Si esegue più volte il ri-fit della funzione A/L con sotto-insiemi di dati originali
  - creiamo una serie di stime di funzioni A/L che creano un intervallo di confidenza intorno alla forma originale.
  - Possiamo calcolare il capitale utilizzando ciascuno dei sotto-insiemi fits, ottenendo una stima del errore standard potenziale del capitale calcolato.
- B. In alternativa al bootstrapping, potremmo ripetere il fit LSMC con nuovi scenari aleatori di fitting

# 3

## Benefici nell'uso dell'LSMC

## Comparazione di varie metodologie proxy

	Replicating Portfolios	Curve Fitting	LSMC
Output	Formule analitiche e.g. Black-Scholes	Polinomio	Polinomio
Run Time Savings	✓ ✓	✓ ✓	✓ ✓ ✓
Non Market Risks	✗	✓	✓ ✓ ✓
Estimazione dell'intervallo di confidenza	✗	✓	✓ ✓ ✓
Expert Judgement	Necessario per selezionare Assets	Necessario per selezionare punti di fitting	Meno soggettiva di curve fitting
Robustezza	✓	✓	✓ ✓ ✓
Comprensione del Management	✓ ✓	✓ ✓ ✓	✓ ✓

## Vari usi dei proxies

1. **Modello interno SCR:** produzione della distribuzione di capitale, da cui ottenere il percentile 99.5°.
2. **Stress Test:** le funzioni proxy consentono una valutazione rapida delle passività assicurative. I risultati possono essere forniti più rapidamente e con maggiore frequenza.
3. **Hedge Monitoring:** se l'assicuratore ha una copertura per ridurre l'esposizione da garanzie / opzioni del passivo, allora la funzione proxy può essere utilizzata per monitorare l'efficacia e avvisare quando la copertura ha bisogno di riequilibrio
4. **Copertura dei Greeks:** se l'assicuratore ha una copertura dinamica può utilizzare la funzione di proxy per ricalcolare le greche d'accordo con i movimenti di mercato
5. **Valutare Asset Strategies / Optimal Asset Allocation**
6. **Proiezione ORSA** dei passivi nel corso del periodo di pianificazione

# 4

## Esempi

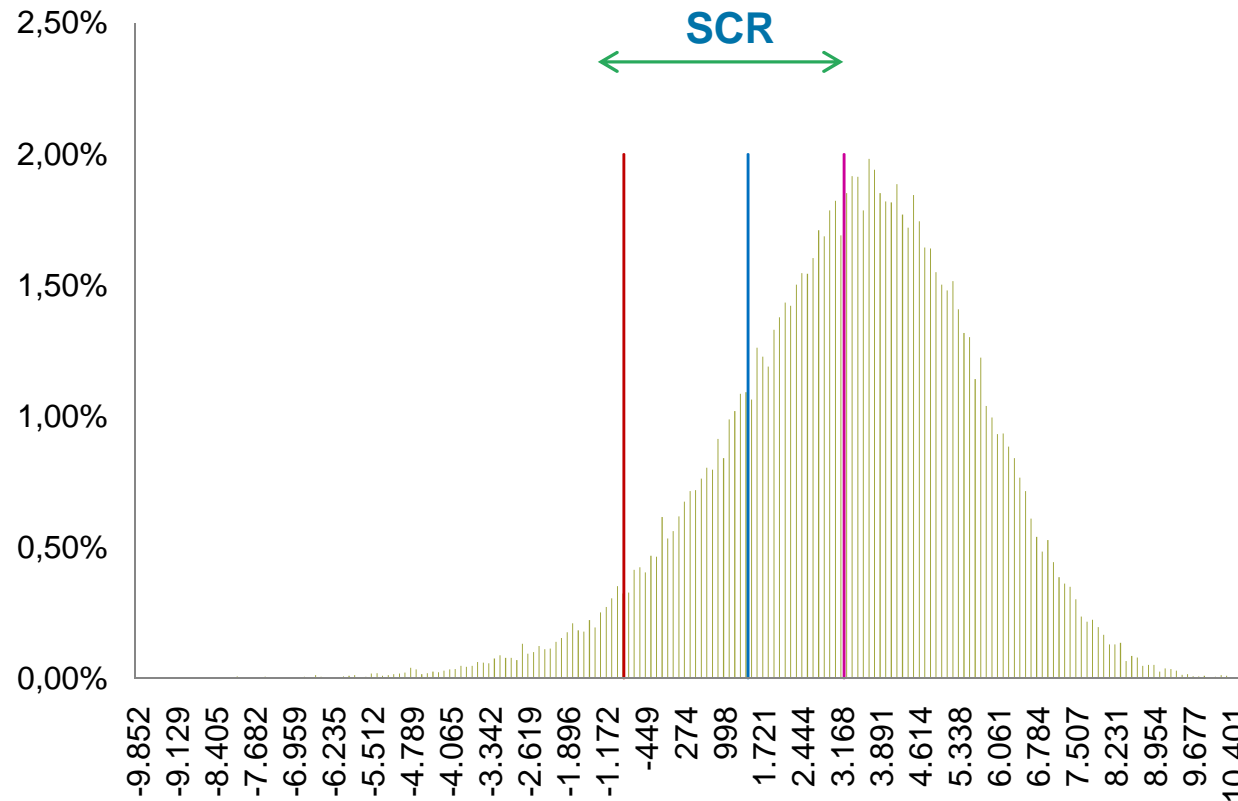
# Asset Allocation con LSMC

- » Le metodologie di asset allocation tradizionali come l'ottimizzazione media-varianza non sono adatte sotto i vincoli di Solvency II:
  - La misura del rischio è definito dal capitale di Solvency II
  - La performance del portafoglio è definita dal valore NAV al tempo  $t = 1$
  - complesse interazioni tra Assets e Liabilities
- » Il vettore di allocazione iniziale (titoli di Stato, obbligazioni societarie, azioni, proprietà) è definito da  $A_{init} = (50\%, 20\%, 20\%, 10\%)$
- » Partiamo dal presupposto che il portafoglio di asset viene ribilanciato ogni anno per l'asset allocation di partenza.
- » Qualsiasi variazione dell'asset allocation richiederà il calcolo delle passività sulla base di 5000 prove. Di conseguenza, gli assicuratori sono solitamente costretti a limitare la loro analisi ALM ad un ridotto numero di allocazioni.
- » => uso della tecnica LSMC

## Caso di studio - caratteristiche del prodotto

Parameter	Value
Single Premium	100 000 €
Guaranteed minimum rate	3 %
Bonus Participation rate	90%
Projection period	40 y
Asset allocation	<ul style="list-style-type: none"><li>• 50% in Govies</li><li>• 20% in Corporate</li><li>• 20% in Equities</li><li>• 10% in Property</li></ul>
Expenses	<ul style="list-style-type: none"><li>• Initial : 2 %</li><li>• Recurring : 2 %</li></ul>
Charges	<ul style="list-style-type: none"><li>• Initiaux : 0.5%</li><li>• Annual: 0.25%</li></ul>
Lapse rate	3 % annual
Mortality	0.05 % annual

## Distribuzione del NAV

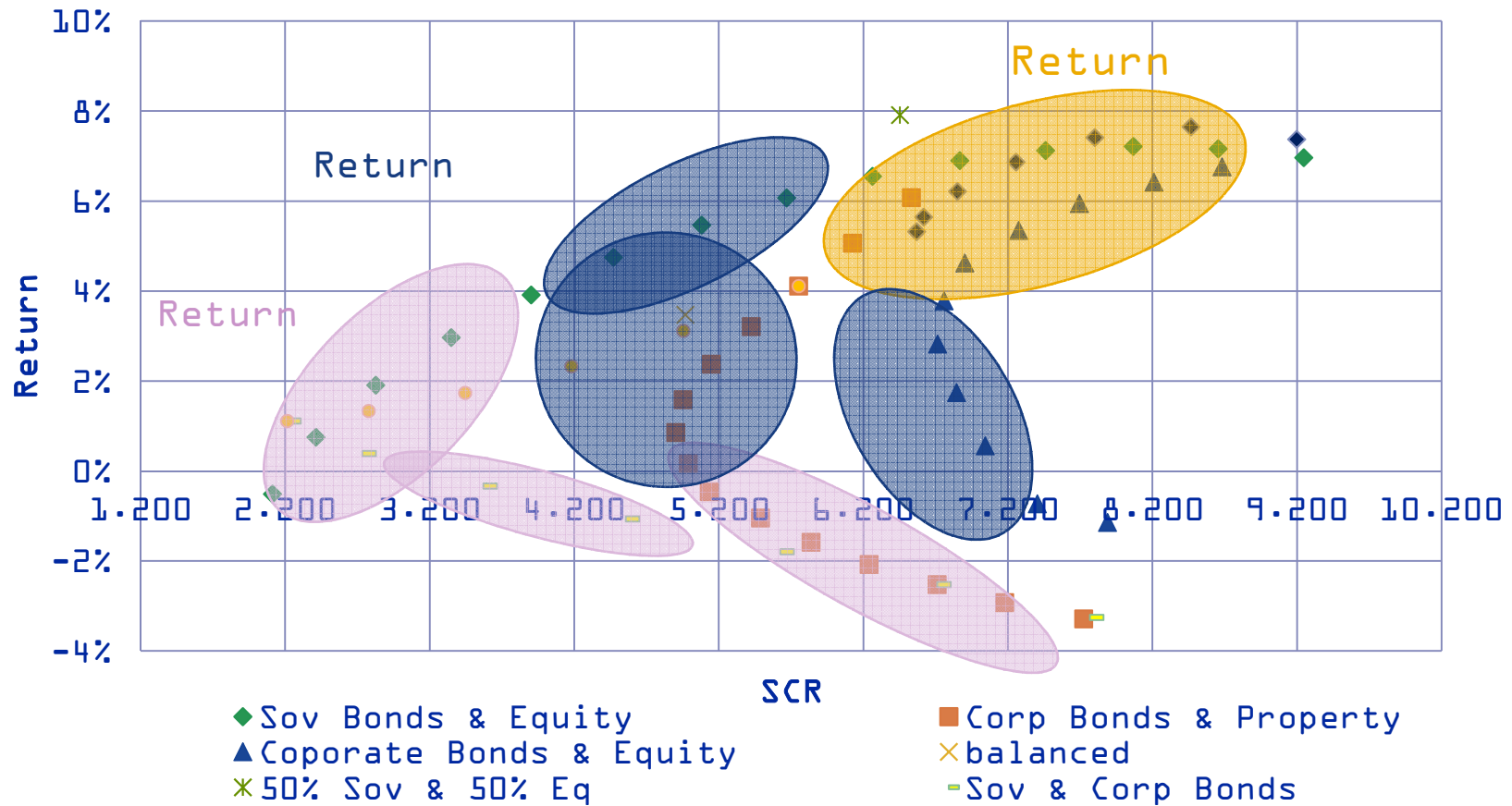


Stats	Valore (€ m)
max	10 814
min	- 9 852
Average	3 256
kurtosis	0,574
Skew	-0,472
Median	3 422
std dev	2 328
intervalle	103
Quantile 99,5%	- 821
Quantile 80%	1 404

- » Il margine di solvibilità è 4077 €
- » La probabilità di insolvenza (cioè NAV negativo) è 8,5%



# Ritorno sul NAV / SCR con variazione di 2 Assets



5

Q&A

**Romain Lombardo**

Attuario qualificato

[Romain.lombardo@moodys.com](mailto:Romain.lombardo@moodys.com)

Tel: +33 1 72 29 34 53

Mobile: +33 6 75 430 431



© 2014 Moody's Corporation, Moody's Investors Service, Inc., Moody's Analytics, Inc. and/or their licensors and affiliates (collectively, "MOODY'S"). All rights reserved.

CREDIT RATINGS ISSUED BY MOODY'S INVESTORS SERVICE, INC. ("MIS") AND ITS AFFILIATES ARE MOODY'S CURRENT OPINIONS OF THE RELATIVE FUTURE CREDIT RISK OF ENTITIES, CREDIT COMMITMENTS, OR DEBT OR DEBT-LIKE SECURITIES, AND CREDIT RATINGS AND RESEARCH PUBLICATIONS PUBLISHED BY MOODY'S ("MOODY'S PUBLICATIONS") MAY INCLUDE MOODY'S CURRENT OPINIONS OF THE RELATIVE FUTURE CREDIT RISK OF ENTITIES, CREDIT COMMITMENTS, OR DEBT OR DEBT-LIKE SECURITIES. MOODY'S DEFINES CREDIT RISK AS THE RISK THAT AN ENTITY MAY NOT MEET ITS CONTRACTUAL, FINANCIAL OBLIGATIONS AS THEY COME DUE AND ANY ESTIMATED FINANCIAL LOSS IN THE EVENT OF DEFAULT. CREDIT RATINGS DO NOT ADDRESS ANY OTHER RISK, INCLUDING BUT NOT LIMITED TO: LIQUIDITY RISK, MARKET VALUE RISK, OR PRICE VOLATILITY. CREDIT RATINGS AND MOODY'S OPINIONS INCLUDED IN MOODY'S PUBLICATIONS ARE NOT STATEMENTS OF CURRENT OR HISTORICAL FACT. MOODY'S PUBLICATIONS MAY ALSO INCLUDE QUANTITATIVE MODEL-BASED ESTIMATES OF CREDIT RISK AND RELATED OPINIONS OR COMMENTARY PUBLISHED BY MOODY'S ANALYTICS, INC. CREDIT RATINGS AND MOODY'S PUBLICATIONS DO NOT CONSTITUTE OR PROVIDE INVESTMENT OR FINANCIAL ADVICE, AND CREDIT RATINGS AND MOODY'S PUBLICATIONS ARE NOT AND DO NOT PROVIDE RECOMMENDATIONS TO PURCHASE, SELL, OR HOLD PARTICULAR SECURITIES. NEITHER CREDIT RATINGS NOR MOODY'S PUBLICATIONS COMMENT ON THE SUITABILITY OF AN INVESTMENT FOR ANY PARTICULAR INVESTOR. MOODY'S ISSUES ITS CREDIT RATINGS AND PUBLISHES MOODY'S PUBLICATIONS WITH THE EXPECTATION AND UNDERSTANDING THAT EACH INVESTOR WILL, WITH DUE CARE, MAKE ITS OWN STUDY AND EVALUATION OF EACH SECURITY THAT IS UNDER CONSIDERATION FOR PURCHASE, HOLDING, OR SALE.

MOODY'S CREDIT RATINGS AND MOODY'S PUBLICATIONS ARE NOT INTENDED FOR USE BY RETAIL INVESTORS AND IT WOULD BE RECKLESS FOR RETAIL INVESTORS TO CONSIDER MOODY'S CREDIT RATINGS OR MOODY'S PUBLICATIONS IN MAKING ANY INVESTMENT DECISION. IF IN DOUBT YOU SHOULD CONTACT YOUR FINANCIAL OR OTHER PROFESSIONAL ADVISER.

ALL INFORMATION CONTAINED HEREIN IS PROTECTED BY LAW, INCLUDING BUT NOT LIMITED TO, COPYRIGHT LAW, AND NONE OF SUCH INFORMATION MAY BE COPIED OR OTHERWISE REPRODUCED, REPACKAGED, FURTHER TRANSMITTED, TRANSFERRED, DISSEMINATED, REDISTRIBUTED OR RESOLD, OR STORED FOR SUBSEQUENT USE FOR ANY SUCH PURPOSE, IN WHOLE OR IN PART, IN ANY FORM OR MANNER OR BY ANY MEANS WHATSOEVER, BY ANY PERSON WITHOUT MOODY'S PRIOR WRITTEN CONSENT.

All information contained herein is obtained by MOODY'S from sources believed by it to be accurate and reliable. Because of the possibility of human or mechanical error as well as other factors, however, all information contained herein is provided "AS IS" without warranty of any kind. MOODY'S adopts all necessary measures so that the information it uses in assigning a credit rating is of sufficient quality and from sources MOODY'S considers to be reliable including, when appropriate, independent third-party sources. However, MOODY'S is not an auditor and cannot in every instance independently verify or validate information received in the rating process or in preparing the Moody's Publications.

To the extent permitted by law, MOODY'S and its directors, officers, employees, agents, representatives, licensors and suppliers disclaim liability to any person or entity for any indirect, special, consequential, or incidental losses or damages whatsoever arising from or in connection with the information contained herein or the use of or inability to use any such information, even if MOODY'S or any of its directors, officers, employees, agents, representatives, licensors or suppliers is advised in advance of the possibility of such losses or damages, including but not limited to: (a) any loss of present or prospective profits or (b) any loss or damage arising where the relevant financial instrument is not the subject of a particular credit rating assigned by MOODY'S.

To the extent permitted by law, MOODY'S and its directors, officers, employees, agents, representatives, licensors and suppliers disclaim liability for any direct or compensatory losses or damages caused to any person or entity, including but not limited to by any negligence (but excluding fraud, willful misconduct or any other type of liability that, for the avoidance of doubt, by law cannot be excluded) on the part of, or any contingency within or beyond the control of, MOODY'S or any of its directors, officers, employees, agents, representatives, licensors or suppliers, arising from or in connection with the information contained herein or the use of or inability to use any such information.

NO WARRANTY, EXPRESS OR IMPLIED, AS TO THE ACCURACY, TIMELINESS, COMPLETENESS, MERCHANTABILITY OR FITNESS FOR ANY PARTICULAR PURPOSE OF ANY SUCH RATING OR OTHER OPINION OR INFORMATION IS GIVEN OR MADE BY MOODY'S IN ANY FORM OR MANNER WHATSOEVER.

MIS, a wholly-owned credit rating agency subsidiary of Moody's Corporation ("MCO"), hereby discloses that most issuers of debt securities (including corporate and municipal bonds, debentures, notes and commercial paper) and preferred stock rated by MIS have, prior to assignment of any rating, agreed to pay to MIS for appraisal and rating services rendered by it fees ranging from \$1,500 to approximately \$2,500,000. MCO and MIS also maintain policies and procedures to address the independence of MIS's ratings and rating processes. Information regarding certain affiliations that may exist between directors of MCO and rated entities, and between entities who hold ratings from MIS and have also publicly reported to the SEC an ownership interest in MCO of more than 5%, is posted annually at [www.moody's.com](http://www.moody's.com) under the heading "Shareholder Relations — Corporate Governance — Director and Shareholder Affiliation Policy."

For Australia only: Any publication into Australia of this document is pursuant to the Australian Financial Services License of MOODY'S affiliate, Moody's Investors Service Pty Limited ABN 61 003 399 657AFSL 336969 and/or Moody's Analytics Australia Pty Ltd ABN 94 105 136 972 AFSL 383569 (as applicable). This document is intended to be provided only to "wholesale clients" within the meaning of section 761G of the Corporations Act 2001. By continuing to access this document from within Australia, you represent to MOODY'S that you are, or are accessing the document as a representative of, a "wholesale client" and that neither you nor the entity you represent will directly or indirectly disseminate this document or its contents to "retail clients" within the meaning of section 761G of the Corporations Act 2001. MOODY'S credit rating is an opinion as to the creditworthiness of a debt obligation of the issuer, not on the equity securities of the issuer or any form of security that is available to retail clients. It would be dangerous for "retail clients" to make any investment decision based on MOODY'S credit rating. If in doubt you should contact your financial or other professional adviser.