



ORDINE DEGLI ATTUARI



Il fittaggio delle funzioni di perdita nel Vita (fitting the loss functions)

Luca Bianchi

27 Ottobre 2014

Indice

- Definizione di loss function
- Loss function e conto economico
- Finalità di una loss function
- Loss function e simulazione stocastica
- Relazione con il SCR di Solvency II
- Loss function e copule
- Loss function ed identificazione dei rischi
- Loss function e diversificazione dei rischi
- Loss function e flussi di cassa
- Il fitting delle loss functions
- Il significato dei cross terms
- Il significato del piecewise
- Le management actions
- Mitigazione dei rischi
- Garanzie, opzioni e policyholder behaviour
- L'utilizzo delle loss functions
- Rifitting
- * Appendici – A: loss functions per determinare l'avversione ai rischi; B: il razionale sottostante le loss functions delle imposte differite; C: approcci Shapley e Euler per misurare il contributo alla diversificazione



Definizione di loss function

- * Una loss function è un polinomio che esprime l'effetto economico di una o più variabili su un tipo di bilancio
- * Il bilancio in questione può essere, alternativamente:
 - * - il locale redatto secondo i regolamenti Ivass 21 e 22
 - * - lo IAS/IFRS, utilizzato come base per il consolidamento dei Gruppi
 - * - Solvency II
 - * - ICA

La loss function si adatta in modo ideale agli ultimi due perché le riserve tecniche hanno una componente importante valutata con criteri «market consistent», nota con il termine «best estimate».

La caratteristica che più interessa della best estimate è che raccoglie tutti i tipi di flussi di cassa con due soli vincoli:

- a) Che siano ripetibili, cioè non one off né eccezionali
- b) Che rispettino il vincolo del contract boundary

Ma le loss functions prevedono anche l'andamento delle passività diverse dalle best estimate («other liabilities»)



Loss function e Conto Economico (1/2)

- * Il conto economico è l'elemento fondamentale – su un totale di quattro - che spiega il perché il patrimonio netto Solvency II ad inizio anno era «X» ed a fine anno «Y»
 - * Aumenti di capitale e, per contro, distribuzione di dividendi
 - * Effetti dei test di impairment delle deferred tax assets
 - * Effetti dei vincoli imposti dalla normativa sul «ring fencing», sulle partecipazioni bancarie e più in generali sui limiti massimi ammissibili nei Tier 2 e Tier 3
 - * Il risultato di esercizio, o semplicemente «**conto economico**».
- * Il conto economico è il risultato finale aggregato e compensato di molteplici fattori che agiscono indipendentemente od in modo correlato nell'arco di 12 mesi. Fra i più importanti si citano:
 - * I proventi netti degli investimenti
 - * La sopra mortalità o la sottomortalità rispetto alle *attese*
 - * Le spese effettive rispetto alle *attese*
 - * Altri flussi di cassa (in uscita ed in entrata) il cui ammontare è diverso dalle *attese*
 - * I costi eccezionali ed irripetibili sia in termini di prestazioni alla clientela che in termini di spese
 - * I movimenti delle imposte differite attive e passive
- * Le *attese* sono espresse dal contributo dei flussi di cassa alle riserve tecniche di inizio anno che, cadendo nei dodici mesi successivi, escono (sono rilasciati) dalle riserve a fine anno, dopo 12 mesi.



Loss function e Conto Economico (2/2)

- * Le loss functions sostituiscono il conto economico tranne quegli elementi di prestazioni e di spesa che sono eccezionali e irripetibili quali ad esempio:
 - * Prestazioni dovute per sentenze sfavorevoli di cause legali e rispettive spese legali
 - * Aumenti e diminuzioni di impegni contrattuali presenti e futuri dovuti a modifiche normative
 - * Cambi di criterio vuoi che siano dovuti dal Regulator vuoi che siano adattamenti a regole di mercato o consuetudini o regole professionali
 - * Costi reputazionali e costi dovuti al manifestarsi di rischi operativi
- * Ci sono tre tipi di loss functions:
 - * Loss function che descrivono il variare delle riserve tecniche
 - * Le riserve tecniche esprimono la stragrande maggioranza delle passività
 - * Loss functions che descrivono il variare degli investimenti finanziari, di altri attivi e di altre passività
 - * Loss functions che esprimono le imposte differite
- * C'è un quarto tipo di loss function che esprime il new business.



Finalità di una loss function

- * La finalità principale è di evitare di prevedere il conto economico dei successivi 12 mesi (il normale periodo di osservazione di un modello interno coerente con Solvency II) facendo previsioni dettagliate su tutte le voci di conto economico
- * Un simile approccio sarebbe il più preciso ovviamente e sarebbe anche fattibile se si accettasse di lavorare in un unico scenario in cui tutti i fattori sottostanti il conto economico si manifestino secondo la propria media
- * Tuttavia, se vogliamo proiettare da un minimo di 100.000 e fino ad un massimo di 500.000 conti economici dobbiamo necessariamente rinunciare a fare altrettante previsioni dettagliate del conto economico il cui esercizio potrebbe impiegare tempi macchina insopportabili

Dobbiamo quindi utilizzare le loss functions che ci mostrano di quanto varia il profitto o la perdita in conto economico al variare dei fattori sottostanti nei $N = 100.000 - 500.000$ scenari.

Le loss functions cumulate esprimono la migliore approssimazione del conto economico per una data combinazione di fattori sottostanti che sono responsabili e spiegano la variabilità del risultato di esercizio.

Le loss functions sono finalizzate a fine previsionale



Loss function e simulazione stocastica (1/2)

- * N scenari di conto economico ottenuti per simulazione stocastica ci consentono di ordinare i risultati dal più favorevole al meno favorevole associandone la probabilità e quindi di conoscerne la media.
- * Ciascuna loss function esprime l'influenza sul conto economico di un fattore o della combinazione di due fattori o della combinazione di oltre due fattori («**cross terms**»)
- * Influenzare il conto economico vuol dire esprimere la misura quantitativa della **variazione** di profitto rispetto alla media.
- * Dati X singoli fattori, X(2) fattori combinati a coppie, X(3) fattori combinati in triplette,..., X(k) fattori combinati in k-puple, ognuna delle N simulazioni stocastiche fornisce un conto economico espresso con la seguente relazione [1]:

$$Pr = Pr \text{ ofitto_medio_atteso} + \sum_{i=1}^{x+x1+...+x(k)} A_i - L_i + DTA_i$$

Dove A, L e DTA esprimono rispettivamente loss functions degli assets, loss functions delle riserve tecniche e loss functions delle imposte differite attive (se il risultato ha segno negativo esprimono imposte differite passive)



Loss function e simulazione stocastica (2/2)

- * Ad ogni conto economico si associa una probabilità (vedi pagina 10) ottenuta con la tecnica delle «copule».
- * Ordinare i risultati economici espressi dalla [1] dal migliore al peggiore - conoscendo la probabilità di ogni risultato economico - consente di definire una distribuzione di probabilità cumulata del conto economico.
- * Il passo successivo è determinare la peggiore variazione di conto economico che corrisponde al percentile 99.5 e sommarlo alla media cioè al risultato medio di esercizio previsto nei successivi 12 mesi (periodo di osservazione).
- * Questo risultato deve essere sommato agli altri fattori che esprimono la variazione del patrimonio netto nell'arco di 12 mesi. Il **patrimonio netto** alla fine del periodo di osservazione – stante un profitto medio previsto «Pr» netto imposte - e che ha una probabilità dello 0.5% secondo l'ordinamento dal migliore al peggiore è espresso dalla seguente relazione [2]:

$$OF_F^{99.5} = OF_I + (Pr + Pr^{99.5}) + fe + (c - d) + impt$$

Dove «fe» sono i fattori eccezionali e non ripetibili, «c» ed «d» sono gli eventuali apporti di capitale e dividendi e «impt» sono le variazioni annue dei risultati di test di impairment sulle DTA. Pr(99.5) ha quasi certamente segno negativo, ossia esprime una «loss»



Relazione con il SCR di Solvency II

- * Il termine $PR+PR(99.5)$ è logicamente assimilabile all'SCR della standard formula in quanto:
 - * Esprime la variazione congiunta dell'attivo, del passivo, incluso l'effetto delle imposte differite, prevedibile nei successivi 12 mesi con una probabilità dello 0.5% seguendo l'ordinamento dal migliore al peggiore.
 - * Se le metriche ed i metodi di valutazione degli elementi di conto economico sono i medesimi della standard formula, allora la quantità $[PR+PR(99.5)]$ esprime, nel suo valore assoluto, il SCR del modello interno a patto che sia negativa.
 - * $PR(99.5)$ è quasi sicuramente negativa. Ciononostante la quantità $PR+PR(99.5)$ non è necessariamente negativa mentre il SCR della standard formula è sicuramente avverso.

Esempio:

Un Portafoglio assicurativo è costituito per metà da rendite e per metà da polizze che coprono il caso di morte. I rischi di mercato, di controparte ed operativi sono trascurabili. La formula standard misura il rischio di longevità sul primo portafoglio e separatamente il rischio di mortalità sul secondo portafoglio. I rischi sono certamente entrambi positivi (cioè l'impatto è avverso) e quindi anche la loro combinazione «diversificata» è ancora positiva seppure inferiore alla somma algebrica dei due rischi.

Il modello interno può invece in teoria misurare che qualunque variazione della mortalità/longevità genera contestualmente più profitti in un portafoglio rispetto alle perdite generate nell'altro portafoglio: ne consegue che anche gli scenari estremi meno probabili generano profitti.



Loss function e copule

- * Si assume di conoscere le distribuzioni di probabilità di tutti i singoli fattori di rischio che incidono sul conto economico, di tutti le coppie di fattori che incidono in modo combinato, di tutte le triplette (di solito ci si ferma qui).
 - * $M=X+x(2)+\dots+X(k)$ = numero di distribuzioni di probabilità = numerosità delle estrazioni di numeri «pseudo casuali» da ciascuna delle «N» simulazioni stocastiche
- * M numeri pseudo casuali di valore compreso fra $(0;1]$ – che cioè assumono il significato di probabilità - consentono di determinare la «M-upla» del vettore di fattori e combinazioni di fattori che corrispondono a quelle probabilità.
- * La probabilità di avere tale combinazione nella i-esima ($1 \leq i \leq N$) simulazione stocastica è data dalla copula

$$C : [0,1]^M \rightarrow [0,1]$$

Per ottenere questa unica misura di probabilità da M probabilità (una per ogni fattore) si può ad esempio eseguire una copula gaussiana: è sufficiente costruirsi la matrice di correlazione di dimensione $M \times M$ dai rilevamenti storici per costruirsi una distribuzione di probabilità congiunta. Ciò ci permette di associare - ad ogni M-pla ottenuta da una delle N simulazioni stocastiche – i valori presi dagli M fattori che corrispondono proprio a quella probabilità congiunta. Finalmente calcoliamo la loss function di ogni vettore di dimensione M sommando le losses di ciascuno dei suoi fattori che lo compongono e determinate con polinomi.



Loss function ed identificazione dei rischi

- * Osservare lo 0.5% dei peggiori risultati di conto economico ed i fattori che li hanno determinati ci permette di individuare quali sono le peggiori combinazioni dei fattori di mercato, di controparte ed assicurativo.
- * In tal senso, questi fattori assumono correttamente l'etichetta di «fattori di rischio» anche se, qualora fossimo interessati ad osservarne le manifestazioni che cadono nello 0.5% di scenari favorevoli, diventano fattori di guadagno.
 - * **Fattori di mercato**, come tassi di interesse, corso dei titoli azionari, cambi di divise, prezzi di immobili, spread creditizi, default dei riassicuratori e di altre controparti che hanno la funzione di mitigare altri rischi e **fattori assicurativi** quali la mortalità, l'invalidità e la malattia grave, la longevità dei percettori attuali e potenziali di rendite, le spese di gestione delle polizze e degli investimenti, le spese di liquidazione ed i profitti potenziali mancati per l'eccesso di abbandoni volontari sono tutti fattori che contribuiscono al conto economico, nel bene e nel male
 - * Possiamo osservare le 0.5% peggiori combinazioni ottenute dalla simulazione stocastica grazie al valore economico espresso dalle loss functions.



Loss function e diversificazione dei rischi (1/5)

- * Osservando le peggiori 0.5% combinazioni dei fattori, abbiamo anche a disposizione l'effetto economico di ciascun singolo fattore come se agisse a se stante senza interagire con gli altri fattori
 - * L'informazione può essere attinta dagli stress test che sono stati utilizzati per «fittare» la loss function
 - * Oppure, alternativamente, la si ricava dalla loss function che ne esprime l'effetto economico
- * Ad esempio, guardando alla «loss» corrispondente al percentile 99.5, abbiamo a disposizione [3]

$$PR^{99.5} = f(r(1), r(2), \dots, r(h)) \leq 0$$

I valori assunti dagli «h» rischi $r(1), r(2), \dots, r(h)$

- * Di questi abbiamo anche il loro singolo contributo alla loss (o, la cosa è possibile, al profitto) che provvediamo a sommare [3b]:

$$l(r_1) + l(r_2) + \dots + l(r_h) = LPr^{99.5} \leq 0$$

- * Misuriamo la differenza fra la [3] e la [3b], ottenendo la [4]:

$$DL^{99.5} = Pr^{99.5} - LPr^{99.5} \geq 0$$



Loss function e diversificazione dei rischi (2/5)

- * Identifichiamo le «w» osservazioni di conto economico immediatamente successive e peggiori del risultato corrispondente al percentile 99.5 nonché le «w» osservazioni di conto economico immediatamente precedenti, ancora avverse ma un po' meno avverse del risultato corrispondente al percentile 99.5

$$PR^{99.5+j} = f(r^j(1), r^j(2), \dots, r^j(h)) \leq 0 \quad PR^{99.5-g} = f(r^g(1), r^g(2), \dots, r^g(h)) \leq 0$$

Con $j=1,2,\dots,w$ e con $g=1,2,\dots,w$

- * Ripetiamo quindi la [3b] un numero di volte pari a 2w:

$$l(r^j_1) + l(r^j_2) + \dots + l(r^j_h) = L^j Pr^{99.5} \leq 0 \quad l(r^g_1) + l(r^g_2) + \dots + l(r^g_h) = L^g Pr^{99.5} \leq 0$$

- * Applichiamo dunque più volte la [4]

$$DL^{99.5+j} = Pr^{99.5+j} - L^j Pr^{99.5} \geq 0 \quad DL^{99.5-g} = Pr^{99.5-g} - L^g Pr^{99.5} \geq 0$$

- * Assegniamo un sistema di pesi partendo da p_0 corrispondente allo scenario 99.5 e via via decrescenti al crescere della distanza da tale scenario.

$$p_1, p_2, \dots, p_w; p_0 \quad 2 * \sum_{i=1}^w p_i = 1 - p_0$$

- * E infine stimiamo il beneficio di diversificazione [5]

$$DIV = p_0 * DL^{99.5} + \sum_{i=1}^w p_i * (DL^{99.5+i} + DL^{99.5-i})$$



Loss function e diversificazione dei rischi (3/5)

L'allocazione del capitale con l'approccio «Euler»

- * La diversificazione del rischio e tutte le conseguenze del caso fino all'allocazione del capitale dipende dal metodo utilizzato
- * Uno di questi metodi prende spunto dalla teoria dei giochi di «Shapley» e funziona bene nelle valutazioni non stocastiche come ad esempio la standard formula oppure nel calcolo del risk margin (la seconda componente delle riserve tecniche del bilancio solvency II).
- * Un altro approccio si applica bene quando si hanno a disposizione molti risultati che possono essere ordinati oggettivamente, come quelli che si ottengono dalla simulazione stocastica cioè le loss functions ordinate in base alle perdite cumulate (si ricordi che le loss functions sono tre, vanno quindi sommate). L'approccio «Euler» assegna un peso a ciascuna delle perdite che si discostano entro «k» volte la volatilità (scostamento quadratico medio); il peso è decrescente all'aumentare della distanza nella classifica delle perdite dal valore centrale («ranking» rispetto alla loss corrispondente al percentile 99.5)



Loss function e diversificazione dei rischi (4/5)

L'allocazione del capitale con l'approccio «Euler» e con pesi «gaussiani»

- * Riprendendo la formula 5, il peso assegnato alla simulazione che occupa la posizione «rank» $i=-w,-w+1,\dots,0,1,2,\dots,w-1,w$ (totale $2w+1$ =ampiezza della finestra di osservazione) è [6]

$$P_i = \frac{\varphi(e^{*(2i+1)}) - \varphi(e^{*(2i-1)})}{\varphi(e^{*(2w+1)}) - \varphi(-e^{*(2w+1)})}$$

- * Dove φ è la funzione di ripartizione (funzione di distribuzione cumulata) normale standard e dove «e» è il rapporto fra
 - * A numeratore: il numero di «standard deviations» di scostamento dalla media della distribuzione normale che corrisponde al percentile 99.5 scelto proprio perché il valore centrale delle W osservazioni corrisponde al 99.5_esimo percentile.
 - * A denominatore: $2*w$



Loss function e diversificazione dei rischi (5/5)

- * Una volta disponibile la serie di pesi $p(i)$, i passi successivi necessari per calcolare il contributo del fattore «x» alla diversificazione della loss totale dell'Impresa sono i seguenti:

1. Misuriamo per ciascuna simulazione «i» delle « $2w+1$ » simulazioni intorno al percentile 99.5

- * Il valore assoluto della loss totale diversificata $L(i)$
- * Il valore assoluto della loss totale diversificata che si ottiene escludendo x $L(i, NoX)$
- * La loss assoluta attribuita ad x presa singolarmente $L(i, X)$
- * Calcoliamo $D(i) = L(i, X) - [L(i) - L(i, NoX)] \geq 0$ $D(i)$

Infatti, se «X» esce dal gruppo, la diversificazione diminuisce da A a B dove

$$A(i) = \sum_{a=1}^H L(i, a) - L(i) \quad ; B(i) = \sum_{a < x}^{H-1} L(i, a) - L(i, NOX) \quad A(i) - B(i) = D(i)$$

2. Calcoliamo il contributo alla diversificazione controllando che

$$C(X) = \sum_i^{2w+1} p(i) * D(i)$$

$$DIV - \sum_{a=1}^h C(a) = 0$$

- * Siamo anche in grado di calcolare la «loss» apportata nel suo complesso dal fattore «x», al netto del suo contributo alla diversificazione dei «rischi»:

$$loss(x) = \sum_i^{2w+1} p(i) * L(i, x) - C(x)$$



Loss function e flussi di cassa

- * Ogni fattore, nella sua potenziale manifestazione avversa, produce un duplice effetto economico sfavorevole:
 - * Un esborso di cassa superiore alla riserva accantonata (lato passivi) ovvero un provento finanziario o creditizio inferiore alle attese (lato attivi)
 - * Un aggiornamento delle ipotesi sottostanti il valore delle riserve (lato passivi) e degli investimenti/crediti (lato attivi) per, rispettivamente, le polizze e gli attivi.
Ad esempio un aumento della mortalità genera maggiori esborsi e genera anche un aumento delle riserve che coprono il rischio di mortalità per la durata contrattuale residua delle polizze rimaste in vita
- * Dei 2 fenomeni, la loss function misura soltanto l'effetto avverso che si manifesta nell'aggiornamento delle ipotesi sottostanti la valorizzazione delle riserve e degli attivi.
 - * Non avere come obiettivo la quantificazione dei flussi di cassa che nei 12 mesi successivi avrebbero un impatto netto avverso sul conto economico implica un paradosso, che nonostante la riserva per unità di polizza aumenti per l'aggiornamento delle ipotesi, le riserve nel loro complesso possano diminuire per la minor numerosità del portafoglio a fine periodo, rilasciando in tal modo un profitto anziché una perdita. Per ovviare a tale inconveniente, si fa in modo che le loss functions misurino il manifestarsi dei rischi oggi, non a fine periodo, e gli effetti sono misurati su attivi, passivi ed imposte differite alla data attuale di valutazione come se gli shocks avvenissero subito e istantaneamente.



Il fitting delle loss functions (LF) (1/6)

- * Ogni loss function esprime il guadagno o la perdita in conto economico che si ha in funzione dello scostamento di un fattore (o di una combinazione di fattori) rispetto alla propria media, al variare dello scostamento secondo una definita distribuzione di probabilità
- * Consideriamo ad esempio la «reference yield curve» cioè la curva dei tassi di interesse che utilizziamo per scontare i flussi di cassa (nel bilancio Solvency II sono allineati da Eiopa ai tassi euroswap privi di rischio) e facciamo un'ipotesi sulla loro distribuzione di probabilità con il vincolo che la media corrisponda al tasso osservato
- * Prendiamo una decina di osservazioni sotto la media ed una decina sopra la media e misuriamone, tramite stress test, gli effetti (1) sulle riserve tecniche lorde e cedute in riassicurazione, (2) sugli attivi e passività diverse dalle riserve tecniche, (3) l'effetto sulle DTA nette, (4) l'effetto sul new business
- * I dieci stress test rappresentano il campione. Non possiamo costruire un campione sulla base di rilevamenti storici.



Fitting le LF (2/6)

- * A fronte di un numero limitato di stress test, si richiede una valutazione accurata degli effetti economici per ciascuno di essi.

Stress test alla base del campione

- * Un primo gruppo di stress test «*in sample*» corrisponde a punti determinati della distribuzione percentile del manifestarsi del tasso di interesse. Ad esempio
 - * 99.9; 99.5; 99.0; 98; 95; 90; 75; 60; 50 e, in modo simmetrico
 - * 0,1; 0.5; 1; 2; 5; 10; 25; 40

Stress test di controllo (validazione)

- * Un secondo gruppo di stress test «*out of sample*» avrà la funzione di verificare a posteriori la bontà del fittaggio. Tuttavia i valori di stress non sono utilizzati per il fittaggio in se.
 - * I valori dello stress test devono avvicinarsi al valore desunto dal polinomio
- * Un terzo gruppo di stress test lo si desume da alcuni scenari di stress simultaneo (**shock simultaneo** o «critical scenario»)
 - * Stressare simultaneamente tutti i fattori significa verificare l'effetto economico misurato nell'ipotesi che tutti gli «h» singoli fattori si manifestino contemporaneamente. Lo scenario simultaneo corrisponde ad una probabilità, ad esempio l'1% (nella direzione avversa), sulla base dell'expert judgment dell'Impresa di Assicurazione.
- * Si prende, di ciascuno degli h fattori, il valore corrispondente allo shock simultaneo e si verifica a quale percentile corrisponde nella sua singola distribuzione di probabilità marginale (continua→)



Fitting le LF (3/6)

- * Supponendo, per il momento, di avere soltanto «h» polinomi corrispondenti ad altrettanti singoli fattori, si prende da ciascuno di essi il valore corrispondente al percentile $p(\cdot)$ in base al quale quel fattore contribuisce allo shock simultaneo.

$$l(r_i, p_i) | p_i \in shock_sim[(r_1, p_1); \dots; (r_i, p_i); \dots; (r_h, p_h)]$$

- * Il passo successivo è di eseguire la somma delle perdite misurate sugli «h» polinomi:

$$CLP = \sum_{i=1}^h l(r_i, p_i)$$

e di confrontarlo con lo shock simultaneo. Da un buon fittaggio ci si aspetta che i due risultati siano vicini (per esempio lo scarto relativo <1%).

- * Un fittaggio non idoneo potrebbe essere segnalato:
 - * Dal risultato negativo del test dello shock simultaneo appena descritto
 - * Dalla non aderenza con gli stress test extra campione
 - * Da un comportamento irregolare della funzione, per esempio prima crescente e poi decrescente oppure con salti improvvisi

Fitting le LF (4/6)

- * Uso dei valori «in sample» cioè «osservati» con stress test:
 - * Minimizzare la somma dei quadrati degli scarti ponderati fra i valori del polinomio ed i valori osservati. I pesi riflettono l'importanza relativa che l'impresa assegna ad ogni osservazione
- * Il miglioramento del fitting può avvenire in uno dei seguenti modi, eventualmente in una combinazione di modi:
 - * Modificando i coefficienti / parametri del polinomio
 - * Aumentando la complessità del polinomio ad esempio utilizzando funzioni quadratiche o funzioni cubiche
 - * Usando combinazioni di fattori («cross terms») ad esempio $X*Y$; X^2*Y ; $-X^2*Y$; $X*Y*Z$
 - * Aggiornando il campione «in sample» alla nuova situazione, ad esempio quando il valore delle azioni in bilancio è diminuito del 20% rispetto alla data cui si riferiva il campione precedente. In casi come questo, traslare il polinomio della loss corrispondente ai prezzi azionari può non essere sufficiente (infatti il fattore è incluso nel polinomio nei termini di scarti relativi / percentuali rispetto al suo valore medio)



Fitting le LF (5/6)

- * Quando si sceglie di combinare i fattori, gli stress «in sample» devono contenere tutte le combinazioni di segno (ossia tutti i «quadranti»)
 - * Ad esempio il «pair wise» XY richiede l'ausilio di stress test nelle 4 combinazioni di segno (1) ++, (2) --, (3) +-, (4) -+, ciascuna delle quali ai diversi percentili.

La forma generale di un polinomio è la seguente:

$$p(x) = a_0x + a_1x^2 + \dots + a_nx^n \text{ and so on.}$$

Che ha il difetto di avere coefficienti altamente correlati. Ad esempio, se si vuole aggiungere il termine x^3 , i coefficienti $a(0)$ e $a(1)$ cambiano significativamente

Una forma più complessa è detta «ortogonale»:

$$p(x) = c_0p_0(x) + c_1p_1(x) + \dots + c_np_n(x) \text{ and so on.}$$

Cioè una combinazione lineare di polinomi fra loro poco correlati. Questa forma ha la proprietà di rendere più stabile la curva. Tornando all'esempio precedente, quando si aggiunge il termine x^3 per migliorare il fitting, i coefficienti già esistenti moltiplicativi di X e di x^2 restano quasi invariati.



Fitting le LF (6/6)

- * Una funzione lineare di un fattore o di una combinazione di fattori ci dice che il guadagno o la perdita in conto economico cresce in modo direttamente proporzionale al variare del fattore in questione.
 - * Un esempio può essere ben rappresentato dalla riserva di una polizza temporanea per il caso di morte ed a premio unico: se l' $X\%$ di incremento di mortalità porta l' $Y\%$ di perdita in conto economico, allora $2 \cdot X\%$ di incremento di mortalità porterebbe $2 \cdot Y\%$ di perdita in conto economico
- * Normalmente la relazione non è lineare, cioè il guadagno o la perdita non si manifesta in modo direttamente proporzionale rispetto alla variazione relativa del fattore.
 - * Considerando ancora l'esempio precedente, la loss function include l'effetto della cessione in riassicurazione del rischio di mortalità che ha efficacia quando il cumulo delle prestazioni liquidate per sinistro in un anno eccede la soglia oggetto del trattato di riassicurazione



Il significato dei cross terms

- * I cross terms, detti semplicemente “**pair wise**” quando si riferiscono a coppie di fattori, dovrebbero essere utilizzati per catturare le minori perdite dovute all’interazione fra rischi ovvero perdite addizionali, superiori alla somma dei singoli rischi, dovuti proprio alla loro reciproca interazione.
- * L’interazione non dice nulla sulla probabilità che coppie, triplete ecc... interagiscano: le probabilità sono determinate dalla copule, date le distribuzioni marginali e la struttura delle dipendenze.
- * L’interazione riflette invece l’impatto sul conto economico di due, tre.... rischi qualora dovessero verificarsi contemporaneamente.
- * Ad esempio una correlazione vicina al 100% fra aumento della longevità e minori riscatti a scadenza (=aumento della propensione ad optare per la rendita) esprime che i due fattori si manifestano nello stesso momento ma non esprime quale sia l’effetto economico congiunto di tali fattori, una volta verificato che avvengono entrambi



Il significato del piecewise

- * Un piece wise è un punto di discontinuità del polinomio che si manifesta per tener conto che, ad un determinato livello del fattore di rischio (o della combinazione di più fattori), il polinomio cambia forma.

Ad esempio quando un rischio supera una certa soglia, l'Impresa attua una management action per mitigare il rischio, ad esempio riducendo le rivalutazioni contrattuali pur mantendosi oltre le garanzie di minimo.



Le management actions

- * Le loss functions devono includere gli effetti delle management actions (tipo A) perché le riserve tecniche, in base alla normativa Solvency II, includono le azioni del Management
- * Le loss functions devono includere anche gli effetti dei cambiamenti di management actions (tipo B) che, alla data di valutazione, si prevede di mettere in atto quando alcuni eventi superano una prefissata soglia di sicurezza (eventi «trigger») purchè il ricorso a tali azioni sia documentato ed autorizzato dall'impresa
 - Le management actions di tipo A si riflettono generalmente nella non linearità del polinomio che esprime la loss function del singolo fattore di stress
 - Le management actions di tipo B si riflettono generalmente nei cross terms o/e nei piece wise del polinomio
- * Sono management actions:
 - * Riduzioni delle rivalutazioni tramite il realizzo di minori plus od il realizzo di minus nella gestione separata sottostante le riserve tecniche
 - * Cambio di mix allocation degli investimenti (tipo di attivi; durata; livello di rischiosità).
- * Non sono ammesse come management actions:
 - * piani di customer care, di trasformazione delle polizze incluse relative riduzioni delle garanzie o aumento dei caricamenti



Mitigazione dei rischi

- * Le loss functions sono espresse considerando gli strumenti di mitigazione dei rischi, quali ad esempio il ricorso alla riassicurazione.
- * Gli effetti sono evidenti nella non linearità del polinomio o/e nella presenza dei cross terms
- * Gli strumenti di mitigazione dei rischi determinano un rischio di controparte misurato esplicitamente da una loss function appropriata.



Garanzie, Opzioni e Policyholder Behaviour (1/3)

- * Il policyholder behaviour è un particolare diritto di opzione che si esprime con il riscatto della polizza (surrender) o con l'abbandono volontario del pagamento dei premi (paid up)
- * Una probabilità standard, di base, esiste per ogni prodotto legato al tempo trascorso dalla decorrenza di polizza perché le penali di abbandono dipendono proprio dal tempo trascorso, ma oltre a ciò il modello deve tener conto della variabilità della probabilità di riscatto/abbandono al variare degli altri fattori, primo fra tutti la curva dei tassi di interesse. Si dice quindi che il comportamento del Contraente è dinamico (DBP che sta per «dynamic policyholder behaviour») rispetto ad un altro fattore
- * Il DPB è modellato in ogni loss function, implicitamente tramite un effetto non lineare del fattore (tasso di interesse, longevità,.....) sul polinomio.
- * Occorre fare attenzione a non modellare il DPB esplicitamente nel polinomio che esprime il rischio «lapse» (decadenza anticipata) onde evitare il «double counting» con gli effetti impliciti espressi negli altri polinomi
- * L'adverse policyholder behaviour tiene conto anche della diminuzione delle probabilità di abbandono al manifestarsi di un evento che rende conveniente
 - * L'abbandono del contratto dal punto di vista dell'assicuratore, se ciò fosse legalmente possibile
 - * Il mantenimento o/e prolungamento del contratto da parte del policyholder



Garanzie, Opzioni e Policyholder Behavior (2/3)

- * Un'opzione contrattuale è un diritto del contraente esercitabile in futuro con determinate probabilità e che ha un effetto economico per l'Impresa
- * L'effetto economico può essere:
 - * sfavorevole ma in grado di mantenere la riserva best estimate inferiore al valore contabile (VIF positivo)
 - * sfavorevole a tal punto di far incrementare la riserva oltre il valore contabile (VIF negativo)
 - * favorevole, cioè fa diminuire la riserva
- * L'opzione deve essere considerata in tutte le tre fattispecie a condizione, nel caso in cui sia favorevole all'Impresa, resti coerente con il «contract boundary»
- * L'opzione si manifesta con la non linearità del polinomio o con la presenza dei cross terms



Garanzie, Opzioni e Policyholder Behavior (3/3)

- * Le garanzie presenti in alcuni tipi di prodotti sono:
 - * Minimi garantiti, spesso espressi nei termini di tassi di interesse consolidati sulla riserva contabile (leggi «riserva matematica pura in base ai premi puri iscritta nel bilancio locale») cioè a capitalizzazione composta
 - * Minimi garantiti come sopra ma a capitalizzazione semplice (interessi pagati come cedole periodiche/riscatti parziali)
 - * Minimi erogabili al verificarsi di uno o più eventi ad epoche future prestabilite (noti come bonus di fedeltà basati sulle performance finanziarie delle gestioni separate sottostanti)
 - * Partecipazione agli utili di mortalità, invalidità
 - * Conversione della riserva contabile in rendita con coefficienti prestabiliti o
 - all'emissione del contratto o (come capita più frequentemente)
 - in epoca successiva sulla generalità delle polizze in vigore



L'utilizzo delle loss functions

Possibili utilizzi delle loss functions:

- 1) Calcolo del requisito di capitale «REC» in alternativa al SCR della formula standard
 - Anche come SCR di un modello interno a patto che assets, riserve tecniche e altre liabilities siano modellate come prescritto da Eiopa (coerenza con Direttiva Solvency II, ITS e linee guida)
- 2) Distribuzione dei bilanci di fine esercizio
 - Occorre escludere dalle loss functions i cambi di management actions (tipo B)
 - Aggiungere la capitalizzazione al tasso di interesse di 1 anno
 - Aggiungere il contributo del new business, se avverso
- 3) Roll forward, ossia previsione del requisito di capitale nell'arco dei 12 mesi successivi al variare delle quantità espresse nei bilanci dei mesi / trimestri successivi
- 4) Stress e scenario testing, ad esempio la situazione patrimoniale nell'ipotesi che la curva dei tassi di interesse si posizioni in media ad un altro livello.
- 5) Determinare il capitale «add on» da aggiungere al SCR regolamentare per esprimere il proprio grado di avversione ai rischi.



Rifitting

- * Occorre ricostruire una o più loss functions prima della prossima scadenza almeno se si verifica uno dei seguenti fenomeni:
 - * Cambia il mix od il profilo degli assets o/e delle liabilities
 - * È in corso una modifica delle ipotesi biometriche o degli abbandoni volontari o delle spese ai fini del calcolo delle riserve tecniche
 - * Ci sono modifiche importanti nelle management actions
 - * Ci sono modifiche importanti nelle politiche sulle modifiche di management actions in caso di stress
 - * Modifiche importanti nelle tecniche di mitigazione dei rischi
 - * Fusioni di imprese o acquisizioni di portafoglio



Appendice A: loss functions per determinare l'avversione ai rischi

Loss Function e soglia di accettabilità del rischio

- * La loss function può essere utilizzata per determinare la quota percentuale da aggiungere al SCR regolamentare per tener conto del grado di avversione al rischio dell'impresa.

Ecco come fare:

1° passo: stabilire quale patrimonio netto (OF') corrisponde alle losses calibrate ad un percentile compreso fra il 50_esimo ed il 99,5_esimo, ad esempio l'80_esimo → assets, liabilities e DTA corrispondono ad un nuovo balance sheet di partenza pre-stressato

$$\rightarrow OF' = A' - L' + DTA'$$

2° passo: determinare la quantità $\Delta = OF - OF' > 0$, cioè la diminuzione di patrimonio netto nella nuova situazione pre-stress in valore assoluto

3° passo: calcolare il SCR' applicando la standard formula a A', L'

4° passo: definire la quantità $\alpha = (SCR' + \Delta) / SCR - 1 \geq 0$

Da ora in avanti $\alpha * 100$ rappresenta il capitale add on da aggiungere in termini relativi al SCR regolamentare.



Appendice B: il razionale sottostante le loss functions delle imposte differite (1/3)

PATRIMONIO NETTO

- * Un patrimonio netto Solvency II inferiore ad un patrimonio netto locale a causa di differenze ritenute come temporanee (cioè non permanenti) vedrà emergere i profitti nel futuro al lordo delle imposte (corporate taxes ires e irap) perchè queste sono state già pagate basandosi sui risultati del bilancio locale → credito di imposta «deltaDTA» da aggiungere alle eventuali DTA nette presenti nel bilancio locale → DTA (o DTL) iscrivibili in Solvency II
 - Se la posizione è in DTA occorre comunque verificare se i bilanci Solvency II forniranno tali profitti in un periodo di tempo ragionevole → test di impairment → $MAX(DTA) = corp.tax \times profitti\ futuri$ (senza attualizzazione)
- * Viceversa un patrimonio netto Solvency II superiore ad un patrimonio netto locale a causa di differenze temporanee pagherà le tasse in futuro, quando nel bilancio locale emergono i profitti che Solvency II ha anticipatamente considerato nel proprio stato patrimoniale → debito di imposta da aggiungere alle eventuali DTA nette presenti nel bilancio locale → DTL (o DTA) iscrivibili in Solvency II.
 - Se la posizione resta in DTA occorre fare il test di impairment



Appendice B: il razionale sottostante le loss functions delle imposte differite (2/3)

SCR

Il SCR può essere scontato della quantità ADJ:

$$ADJ = \text{MIN}(\text{corp.tax} \times \text{SCR ante sconto; disponibilit\`a})$$

perché il SCR è interpretabile come un aumento potenziale - a distanza di 12 mesi - delle passività ovvero una diminuzione potenziale del valore delle attività ovvero ad un mix dei due, con probabilità 0,5% e dovuto a cause temporanee piuttosto che permanenti che l'impresa affronterebbe (1) riducendo le DTL oppure (2) aumentando le DTA oppure (3) azzerando le DTL ed iscrivendo DTA.

La disponibilità è:

- Se il bilancio Solvency II è in DTA che sono supportati da sufficienti profitti tassabili futuri, allora occorre verificare se l'impresa, in situazione di stress, sia in grado di aumentare le DTA:
$$\text{MAX}(DTA) = \text{corp.tax residue post stress} = \text{corp.tax} \times \text{profitti futuri} - DTA - \text{impatto da stress}$$
- Se il bilancio è in DTA che ha subito un impairment parziale per effetto di limitati profitti futuri, allora la disponibilità è nulla.
- Se il bilancio ha azzerato le DTA per impairment totale, a maggior ragione la disponibilità è nulla → continua

Appendice B: il razionale sottostante le loss functions delle imposte differite (3/3)

- Se il bilancio è in DTA ma queste sono state limitate dal limite massimo imposto al tier3 (15% del SCR), allora non è possibile sopporre un aumento delle DTA, cioè non ci sono disponibilità
- Se il Bilancio Solvency II è in DTL allora
Se $\text{corp.tax} \times \text{SCR ante sconto} \leq \text{DTL} \rightarrow \text{ADJ} = \text{corp.tax} \times \text{SCR ante sconto}$
- Altrimenti
 $\text{ADJ} = \text{DTL} + \text{eventuali DTA dopo aver azzerato le DTL}$
 $\rightarrow \text{eventuali DTA} \leq \text{corp.tax} \times \text{profitti futuri in situazione di stress}$
 $\text{Max (eventuali DTA)} = \text{corp.tax} \times \text{SCR ante sconto} - \text{DTL}$

La situazione di stress ha duplice effetto:

- Riduce i profitti per unità di passivo ed attivo
- Riduce i volumi di nuova produzione



Appendice C: approcci Shapley ed Euler per misurare il contributo alla diversificazione (1/2)

- * L'informazione che ci interessa è la misura di ogni rischio al netto del suo stesso contributo alla diversificazione. Solo successivamente provvediamo ad attribuire ciascun rischio diversificato alle varie linee di business come ad esempio il rischio di mortalità diversificato potrebbe esserlo proporzionalmente alle temporanee caso morte, alle miste rivalutabili ed alle unit linked con garanzie aggiuntive di mortalità
→ informazione utile al profit testing, al calcolo del risk margin ecc...
- * L'approccio basato sulla teoria dei giochi di Shapley suppone che il rischio-giocatore rimanga nel gioco ma che smetta di collaborare in tanti modi possibili che avranno diversi pesi/frequenze: non collabora con ciascuno degli altri rischi-giocatori, poi con ciascuna delle altre coppie di rischi, poi con ciascuno delle altri rischi presi a tre a tre fino a non collaborare con tutti. Smettere di collaborare vuol dire imporre le correlazioni ad 1 nella matrice di correlazione della standard formula.
- * L'effetto di una mancata collaborazione si traduce in una minore diversificazione nel suo complesso
- * Si fa una media ponderata di tutti i suddetti effetti cioè delle diminuzioni di diversificazione a causa di possibili comportamenti non collaborativi del fattore di rischio, aggiungendo anche l'evento di piena collaborazione con il suo peso.



Appendice C: approcci Shapley ed Euler per misurare il contributo alla diversificazione (2/2)

- * L'approccio basato su Euler immagina che il rischio-giocatore «X» esca dal gioco. Così facendo, gli altri giocatori continuano a diversificarsi reciprocamente ma meno che in presenza di quel rischio «X»
- * Per esempio si passa da 125 – 100, rispettivamente senza e con diversificazione a 95 – 74 dopo l'uscita dal gioco di «X». «X» dunque contribuisce per $25-21=4$ alla diversificazione.
- * Si effettuano da 20 a 50 misurazioni corrispondenti ad altrettanti valori delle losses intorno al percentile 99,5 e se ne fa una media ponderata.

