

La Dipendenza tra Variabili Aleatorie e Copule

Alessandro Ricotta, PhD
(alessandro.ricotta@univr.it)

Edoardo Luini, PhD
(edoardo.glaucoluini@unicatt.it)

Seminario del Comitato Scientifico dell'Ordine degli Attuari

20/01/2023

Agenda

La Dipendenza tra Variabili Aleatorie e le Copule

1. **Concetti Introduttivi**
2. **Misure di Dipendenza**
3. **Copule Bivariate**
4. **Principali Famiglie di Copule Bivariate**
5. **Riferimenti Bibliografici**
6. **Appendice**

Agenda

La Dipendenza tra Variabili Aleatorie e le Copule

- 1. Concetti Introduttivi**
2. Misure di Dipendenza
3. Copule Bivariate
4. Principali Famiglie di Copule Bivariate
5. Riferimenti Bibliografici
6. Appendice

Concetti introduttivi

Introduzione

La valutazione simultanea di più rischi fa sorgere il problema di come considerare "congiuntamente" le grandezze aleatorie oggetto di studio, al fine di quantificare il rischio complessivo risultante a cui si è esposti. Il problema, quindi, si sostanzia nel riuscire a comprendere e modellizzare nel modo più opportuno possibile le differenti forme di dipendenza esistenti tra due o più rischi.

In termini generali, le relazioni esistenti tra due rischi possono essere classificate come segue.

- 1) Perfetta dipendenza positiva: i rischi si muovono esattamente all'unisono, in quanto esiste una dipendenza funzionale crescente tra le grandezze aleatorie in esame (cd comonotonicità).
- 2) Dipendenza positiva: i rischi si muovono nella medesima direzione, al crescere di uno cresce l'altro e viceversa, ma non con la medesima intensità (cd concordanza).
- 3) Indipendenza: non vi è alcuna relazione tra i rischi, questi sono "slegati" tra loro: al variare dell'uno, l'altro non ne risulta influenzato.
- 4) Dipendenza negativa: i rischi si muovono in direzioni opposte, al crescere di uno decresce l'altro e viceversa, ma non con la medesima intensità (cd discordanza).
- 5) Perfetta dipendenza negativa: i rischi si muovono esattamente in direzioni opposte, in quanto esiste una dipendenza funzionale decrescente tra le grandezze aleatorie in esame (cd contromonotonicità).

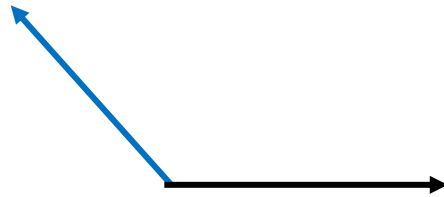
Concetti introduttivi

Introduzione

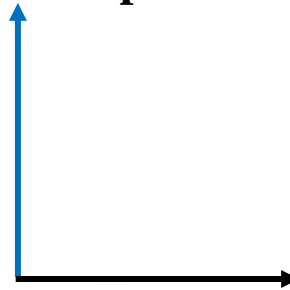
**Perfetta dipendenza
negativa**



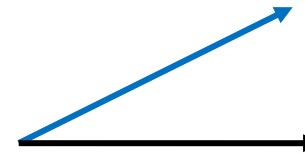
**Dipendenza
negativa**



Indipendenza



**Dipendenza
positiva**



**Perfetta dipendenza
positiva**



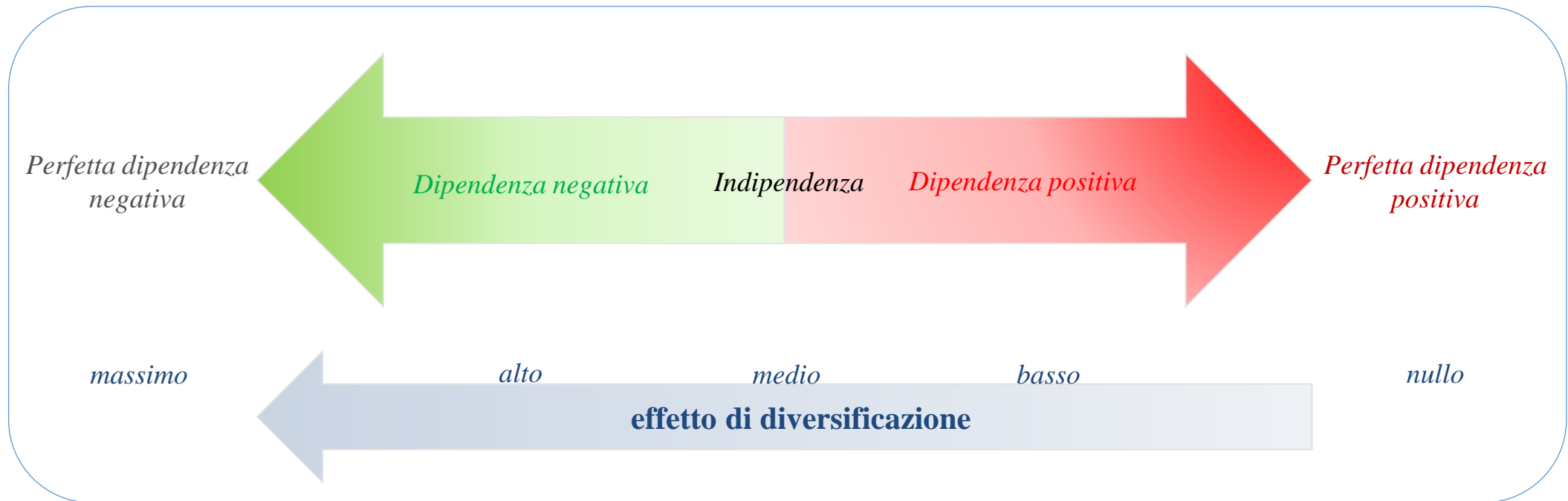
Ad esclusione del solo caso di perfetta dipendenza positiva tra i rischi, la dipendenza tra due rischi comporta un effetto di diversificazione tra gli stessi, intesa come riduzione di variabilità.

Assumere, quindi, congiuntamente molteplici rischi determina un rischio complessivo a cui si è esposti minore rispetto a quello che si fronteggerebbe considerando disgiuntamente i singoli rischi.

La diversificazione tra i rischi è tra i fondamenti dell'attività assicurativa.

Concetti introduttivi

Introduzione



Dipendenza e diversificazione tra i rischi sono due concetti inscindibili tra loro; il grado di diversificazione ottenibile dipende dal grado di dipendenza tra i rischi (ma non solo, essendo coinvolte anche le dimensioni relative dei rischi).

Agenda

La Dipendenza tra Variabili Aleatorie e le Copule

1. Concetti Introduttivi
- 2. Misure di Dipendenza**
3. Copule Bivariate
4. Principali Famiglie di Copule Bivariate
5. Riferimenti Bibliografici
6. Appendice

Misure di dipendenza

Dipendenza tra due variabili casuali

Una misura di dipendenza ha l'obiettivo di cogliere, con determinate specificità, la relazione esistente tra due variabili aleatorie. Le misure presentate nel seguito afferiscono a tre diverse tipologie di legami che possono sussistere tra una coppia di variabili casuali, quali (i) il grado di dipendenza lineare, (ii) il grado di concordanza e (iii) la dipendenza di coda.

Preliminarmente è opportuno richiamare i concetti di indipendenza e perfetta dipendenza positiva e negativa.

Due variabili aleatorie sono tra loro **indipendenti** se e solo se vale la seguente relazione:

$$F(x, y) = F(x)F(y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

dove $F(x, y)$ rappresenta la funzione di ripartizione (FdR) congiunta.

Il concetto di perfetta dipendenza positiva tra le v.a. X e Y è espresso dalla proprietà di **comonotonicità**. In particolare, due variabili aleatorie sono dette comonotone se una è funzione crescente dell'altra:

$$X = \psi(Y)$$

dove $\psi(\cdot)$ rappresenta una funzione crescente.

Misure di dipendenza

Dipendenza tra due variabili casuali

Una importante conseguenza della comonotonicità risulta essere l'additività dei quantili delle variabili casuali. Dato il quantile di ordine α , q_α , vale:

$$q_\alpha(X + Y) = q_\alpha(X) + q_\alpha(Y)$$

Situazione speculare rispetto al caso di perfetta dipendenza positiva è quella definita di **contromonotonicità**; in tale situazione, la v.a. X risulta essere funzione decrescente di Y :

$$X = \psi(Y)$$

dove $\psi(\cdot)$ rappresenta una funzione decrescente.

Misure di dipendenza

Dipendenza tra due variabili casuali

Date due v.a. continue X e Y , le proprietà desiderabili di una misura di dipendenza $\delta(X, Y)$ possono essere individuate nelle seguenti (Joe (2016)):

- 1) Esistenza: $\delta(X, Y)$ deve essere definita per ogni v.a.
- 2) Simmetria: $\delta(X, Y) = \delta(Y, X)$
- 3) Range: $-1 \leq \delta(X, Y) \leq 1$, con $\delta(X, Y) = -1$ e $\delta(X, Y) = 1$ se le v.a. X e Y sono rispettivamente contromonotone e comonotone
- 4) Indipendenza: $\delta(X, Y) = 0$ se $X \perp Y$
- 5) Coerenza di segno: $\delta(-X, Y) = -\delta(X, Y)$
- 6) Invarianza: $\delta(X, Y) = \delta(\psi_1(X), \psi_2(Y))$ con ψ_1 e ψ_2 funzioni strettamente crescenti

Misure di dipendenza

Correlazione lineare

Il coefficiente di correlazione lineare di Pearson (ρ) permette di quantificare il grado di relazione lineare esistente tra due variabili casuali.

Date X e Y , dotate di media e varianza finite, il coefficiente di correlazione lineare è definito come segue:

$$\rho(X; Y) = \frac{\text{cov}(X; Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$$

Il valore di ρ è compreso, per costruzione, nell'intervallo $[-1, 1]$. In particolare, $|\rho(X; Y)| = 1$ se le v.a. sono perfettamente dipendenti tra loro in modo lineare, quindi $X = a + bY$ con $a, b \in \mathbb{R}$ e $b > 0$ nel caso di dipendenza positiva mentre $b < 0$ nel caso di dipendenza negativa.

Inoltre, per $b_1 > 0$ e $b_2 > 0$ vale,

$$\rho(a_1 + b_1X; a_2 + b_2Y) = \rho(X; Y)$$

Il coefficiente di correlazione lineare, quindi, è invariante rispetto a trasformazioni lineari strettamente crescenti delle variabili aleatorie.

Misure di dipendenza

Correlazione lineare

Il valore di ρ , tuttavia, non rispetta la proprietà di invarianza rispetto a trasformazioni non lineari strettamente crescenti o decrescenti delle v.a.:

$$\rho(\psi(X); \psi(Y)) \neq \rho(X; Y)$$

dove $\psi(\cdot)$ rappresenta una funzione non lineare strettamente monotona crescente.

Esempio

Sia $F(x, y)$ la funzione di ripartizione della variabile bidimensionale Normale Standard di parametro $\rho = 0,5$ e siano $F(x)$ e $F(y)$ le funzioni di ripartizione delle rispettive variabili marginali Normali Standard. Per costruzione le v.a. X e Y risultano correlate tra loro con $\rho = 0,5$.

Si consideri come funzione strettamente monotona crescente su tutto il dominio \mathbb{R} la funzione cubica $\psi(x) = x^3$.

Il coefficiente di correlazione lineare calcolato sulle variabili trasformate X^3 e Y^3 non coincide con il valore originario di 0,5 ma è pari a 0,35.

Misure di dipendenza

Correlazione lineare

In generale non è sempre possibile ottenere un coefficiente di correlazione lineare pari a -1 e $+1$; i valori estremi ottenibili di ρ , infatti, possono essere compresi nell'intervallo $-1 \leq \rho_{min} \leq 0 \leq \rho_{max} \leq +1$. L'ampiezza dell'intervallo $[\rho_{min}; \rho_{max}]$ dipende dalle specificità delle v.a. in esame; il coefficiente di correlazione, quindi, dipende dalle caratteristiche distributive delle variabili aleatorie marginali.

La correlazione tra due v.a. è pari a ρ_{min} e ρ_{max} se e solo se le variabili sono rispettivamente contromonotone e comonotone; la relazione inversa, quindi, è soddisfatta ([McNeil, Frey, Embrechts \(2005\), p. 204](#)).

In situazioni di perfetta dipendenza, inoltre, il coefficiente di correlazione lineare non assume necessariamente valori elevati; tanto più la relazione tra due variabili è distante dalla linearità e minore sarà la capacità del coefficiente di correlazione di cogliere la dipendenza tra le variabili aleatorie stesse.

Il coefficiente di correlazione lineare calcolato tra due v.a. indipendenti assume valore nullo. Un valore di $\rho = 0$, tuttavia, non implica l'indipendenza tra le variabili stesse; la relazione inversa è valida solo nel caso di variabili gaussiane.

Misure di dipendenza

Correlazione lineare

Esempio *(segue)*

Si voglia calcolare il valore di ρ tra le v.a. X e Y costruite come segue: $X \sim N(0,1)$ e $Y = X^3$. Le due v.a. sono tra loro comonotone in quanto la v.a. Y è funzione strettamente crescente di X .

Per determinare il coefficiente di correlazione di Pearson tra le due v.a. è necessario quantificare la varianza della v.a. Y e successivamente il termine di covarianza tra le due v.a..

In particolare, la varianza del cubo della variabile Normale Standard è pari a:

$$\text{var}(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = E[(X^3)^2] - [E(X^3)]^2 = E(X^6) - 0 = 15$$

In quanto, per una v.a. $N(\mu, \sigma)$ il momento centrale di ordine n può essere scritto come:

$$E[(X - \mu)^n] = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ dispari} \\ \sigma^n (n-1)!! & \text{se } n \text{ pari} \end{cases}$$

dove $c!!$ rappresenta il doppio fattoriale¹ della grandezza c ; si noti che $E[(X - \mu)^n] = E(X)^n$ se $\mu = 0$. Ne consegue quindi che $E(X^6) = \sigma^6 (5!!) = 15$.

¹ Il doppio fattoriale di un numero c è definito come segue: se c è pari si ha $c!! = \prod_{k=1}^{\frac{c}{2}} 2k$, mentre se c è dispari vale $c!! = \prod_{k=1}^{\frac{c+1}{2}} (2k-1)$.

Misure di dipendenza

Correlazione lineare

Il termine di covarianza, invece, risulta essere il seguente:

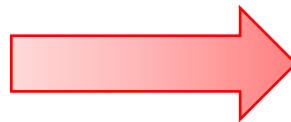
$$\text{cov}(X; Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = E(XX^3) - 0 = E(X^4) = \sigma^4(3!!) = 3$$

Il coefficiente di correlazione lineare, quindi, è pari a:

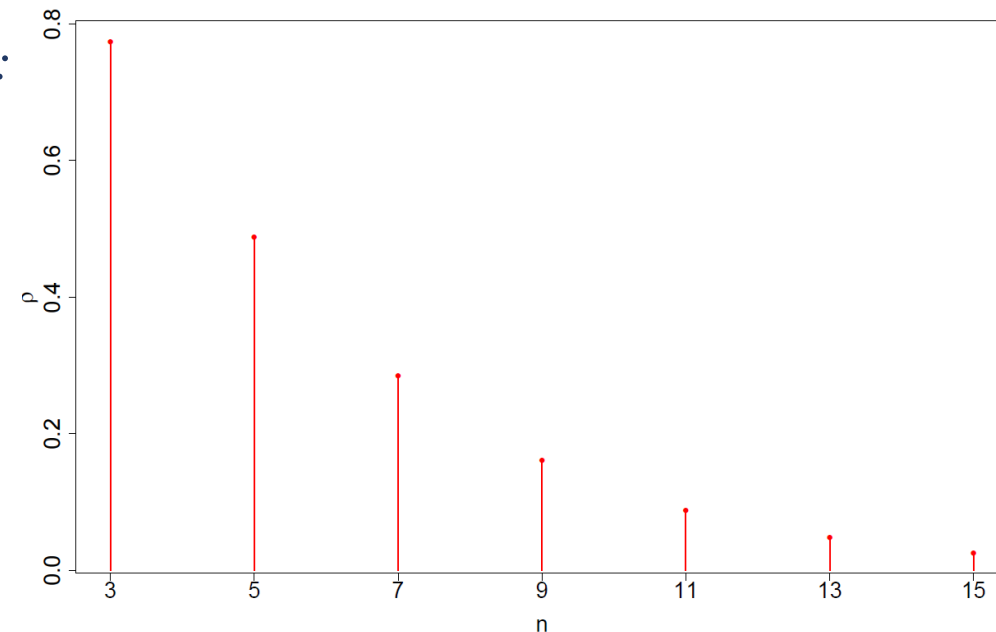
$$\rho(X; Y) = \frac{\text{cov}(X; Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} = \frac{3}{\sqrt{15}} = 0,78$$

Si noti che, in termini generale, stante $X \sim N(0,1)$ e $Y = X^n$, vale:

$$\rho(X; X^n) = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ pari} \\ \frac{n!!}{\sqrt{(2n-1)!!}} & \text{se } n \text{ dispari} \end{cases}$$



Esempio (*fine*)



Misure di dipendenza

Correlazione lineare

In definitiva, le principali limitazioni nell'uso del coefficiente di correlazione lineare per descrivere la dipendenza tra due v.a. sono le seguenti:

- ρ è definito solo per v.a. con media e varianza finite;
- $\rho = 0$ implica l'indipendenza tra le v.a. solo se le variabili sono gaussiane;
- il valore di ρ dipende dalle caratteristiche distributive delle v.a. marginali;
- $\rho = \rho_{min}$ e $\rho = \rho_{max}$ se e solo se le v.a. sono perfettamente dipendenti tra loro in senso negativo e positivo e viceversa;
- il coefficiente di correlazione lineare non è invariante rispetto a trasformazioni non lineari strettamente crescenti;
- le v.a. marginali e il valore di ρ determinano univocamente la distribuzione di probabilità congiunta solo nel caso di distribuzioni ellittiche.

Il coefficiente di correlazione lineare non soddisfa le proprietà desiderabili di: "esistenza" e "invarianza"

Misure di dipendenza

Misure di concordanza

Il τ di Kendall è una misura di concordanza tra due variabili casuali ed è definito come la differenza tra le probabilità di concordanza e discordanza delle coppie di v.a. (X, Y) e (X', Y') indipendenti tra loro e dotate di medesima FdR:

$$\tau(X, Y) = P[(X - X')(Y - Y') > 0] - P[(X - X')(Y - Y') < 0]$$

Il τ di Kendall inoltre può essere espresso come,

$$\tau = 4 \int \int F(x, y) f(x, y) dx dy - 1$$

La versione campionaria, di contro, è definita come:

$$\hat{\tau} = \frac{c - d}{c + d} = \frac{c - d}{\binom{n}{2}}$$

dove c e d rappresentano rispettivamente il numero delle concordanze e discordanze tra le coppie di osservazioni, mentre n la numerosità campionaria.

Misure di dipendenza

Misure di concordanza

Il **ρ di Spearman** è una misura di concordanza tra due variabili casuali e può essere definito, data la v.a. bidimensionale (X, Y) , come il coefficiente di correlazione lineare calcolato tra le FdR $F(x)$ e $F(y)$:

$$\rho_S = \rho[F(x); F(y)]$$

La versione campionaria, invece, è definita come:

$$\hat{\rho}_S = \frac{12}{n(n^2 - 1)} \sum_{i=1}^n \left(r_i - \frac{n+1}{2} \right) \left(s_i - \frac{n+1}{2} \right)$$

dove r_i e s_i rappresentano rispettivamente il rango dell'osservazione x_i e y_i , mentre n la numerosità campionaria.

Misure di dipendenza

Misure di concordanza

Per il τ di Kendall e il ρ di Spearman, valgono i seguenti risultati:

- l'indipendenza tra X e Y implica $\tau = \rho_S = 0$, tuttavia non vale la relazione inversa;
- $\tau, \rho_S \in [-1, +1]$, inoltre i valori di -1 e $+1$ sono raggiunti solo quando le v.a. sono tra loro contromonotone e comonotone rispettivamente e vale anche la relazione inversa;
- τ, ρ_S sono invarianti rispetto a trasformazioni strettamente monotone crescenti delle variabili aleatorie;
- In generale, la distribuzione congiunta di una variabile aleatoria $F(x, y)$ non è univocamente determinata dalle distribuzioni marginali $F(x)$ e $F(y)$ e dal τ di Kendall o il ρ di Spearman.

Si noti, infine, che, a differenza del coefficiente lineare di Pearson, date due variabili aleatorie marginali continue, è sempre possibile costruire una v.a. congiunta con valore di concordanza arbitrario nell'intervallo $[-1, +1]$.

Data una v.a. bidimensionale $F(x, y)$, dotata di marginali X e Y continue, il τ di Kendall e il ρ di Spearman sono legati dalle seguenti relazioni (Nelsen (2006)):

$$\begin{aligned} & \bullet -1 \leq 3\tau - 2\rho_S \leq 1 \\ & \bullet \frac{1+\rho_S}{2} \geq \left(\frac{1+\tau}{2}\right)^2 \text{ e } \frac{1-\rho_S}{2} \geq \left(\frac{1-\tau}{2}\right)^2 \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} & \frac{3\tau - 1}{2} \leq \rho_S \leq \frac{1 + 2\tau - \tau^2}{2} \quad \text{per } \tau \geq 0 \\ & \frac{\tau^2 + 2\tau - 1}{2} \leq \rho_S \leq \frac{1 + 3\tau}{2} \quad \text{per } \tau < 0 \end{aligned}$$

Misure di dipendenza

Dipendenza di coda

I coefficienti di dipendenza di coda misurano la dipendenza esistente nelle code superiore e inferiore di una distribuzione bivariata. Tali misure sono definite come una probabilità condizionata e dunque hanno dominio $[0,1]$.

In particolare, il coefficiente di coda superiore è risulta essere:

$$\lambda_U = \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} P[Y > F_Y^{-1}(\alpha) | X > F_X^{-1}(\alpha)]$$

dunque, λ_U guarda alla probabilità che la variabile Y ecceda il quantile di ordine α , condizionatamente a valori di X che eccedono il rispettivo quantile α .

Se $\lambda_U = 0$, allora le v.a. X e Y sono asintoticamente indipendenti nella coda superiore, viceversa le v.a. mostreranno dipendenza di coda superiore.

Analogamente, il coefficiente di coda inferiore è definito come:

$$\lambda_L = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} P[Y \leq F_Y^{-1}(\alpha) | X \leq F_X^{-1}(\alpha)]$$

Se le v.a. X e Y sono comonotone vale $\lambda_U = 1$, di contro per v.a. contromonotone e indipendenti si ha $\lambda_L = 0$.

I coefficienti di dipendenza di coda non soddisfano le proprietà desiderabili di: "coerenza di segno" e "range"

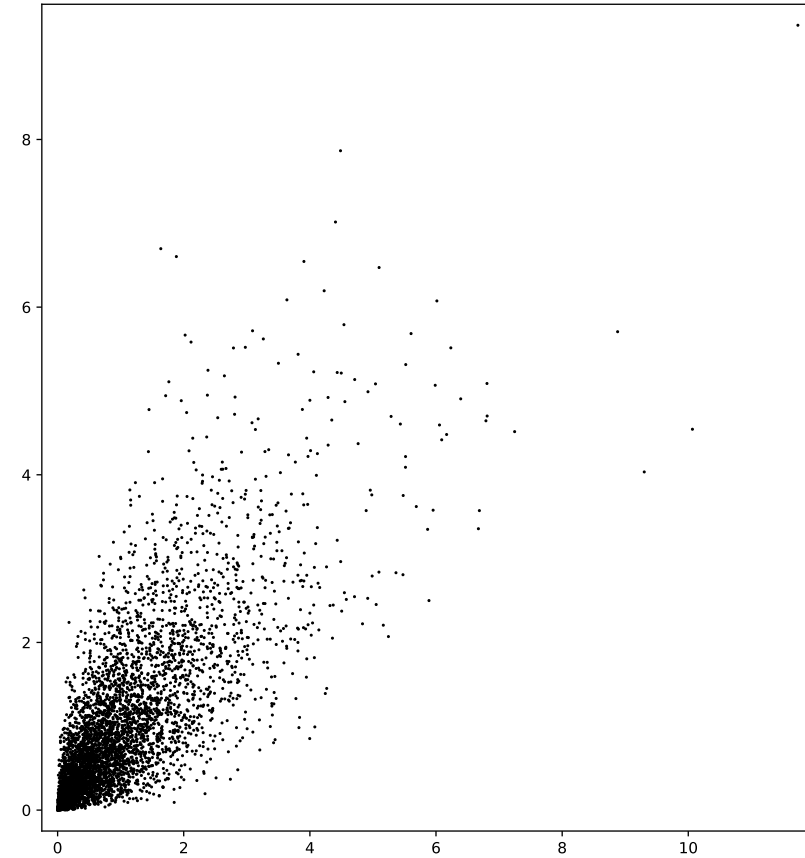
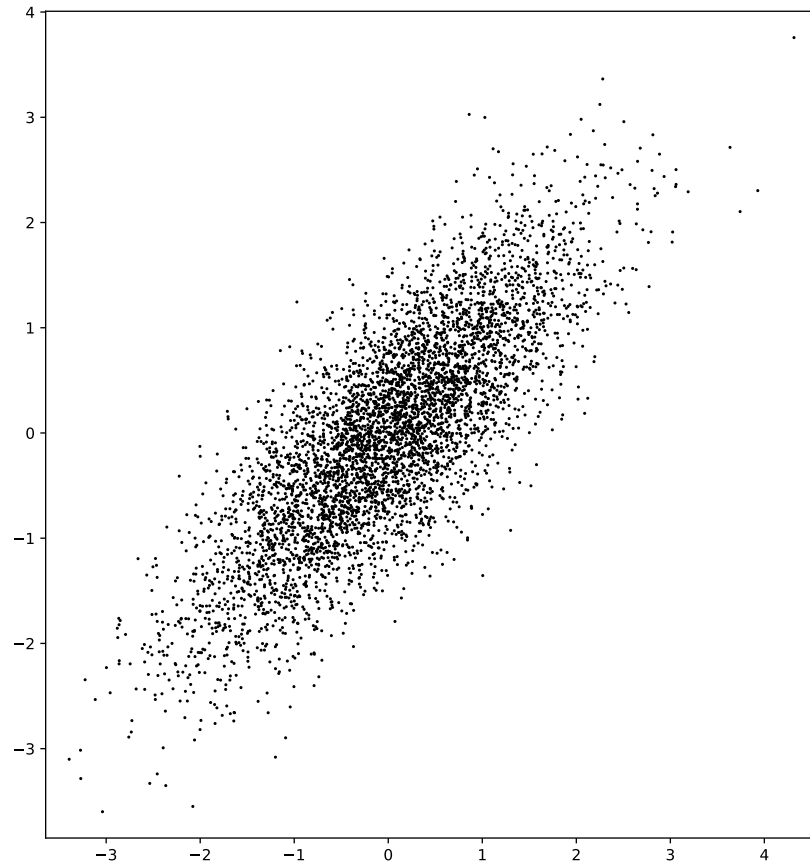
Agenda

La Dipendenza tra Variabili Aleatorie e le Copule

1. Concetti Introduttivi
2. Misure di Dipendenza
- 3. Copule Bivariate**
4. Principali Famiglie di Copule Bivariate
5. Riferimenti Bibliografici
6. Appendice

Copule bivariate

Quesito



Copule bivariate

Definizione e proprietà

Considerando senza perdita di generalità il caso bivariato, una **copula** è definita come una funzione di ripartizione bivariata con variabili marginali uniformi standard,

$$C(u, v): [0,1]^2 \rightarrow [0,1] \quad \text{con } u, v \in [0,1].$$

Le seguenti proprietà caratterizzano una copula:

- $C(u, 0) = C(0, v) = 0$
- $C(u, 1) = u$ e $C(1, v) = v$
- Per u_1, u_2 e v_1, v_2 tali che $u_1 \leq u_2$ e $v_1 \leq v_2$, vale

$$C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) + C(u_1, v_1) \geq 0.$$

Teorema di Sklar

Sia $F(x, y)$ una FdR bidimensionale e siano $F(x)$ e $F(y)$ le FdR marginali. Allora esiste una funzione copula C tale per cui per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$F(x, y) = C(F(x), F(y))$$

Di contro, se C è una copula e $F(x)$ e $F(y)$ sono le FdR marginali, allora la funzione $F(x, y)$ definita dalla relazione precedente è una FdR bivariata di marginali $F(x)$ e $F(y)$.

Copule bivariate

Definizione e proprietà

Per ogni coppia di v.a. X e Y , la funzione copula C è definita su $Range(F(x)) \times Range(F(y))$.

Il teorema di Sklar, quindi, fornisce una rappresentazione della FdR congiunta in termini della funzione copula. È possibile inoltre invertire la relazione ed esprimere la copula in termini di FdR congiunta e delle funzioni quantiliche delle v.a. marginali:

$$C(u, v) = F_{X,Y} \left(F_X^{-1}(u), F_Y^{-1}(v) \right) \quad \text{con } u, v \in [0,1]$$

Date le v.a. X e Y continue, dal teorema di Sklar deriva che sottostante ad ogni distribuzione bivariata (multivariata) esiste una sola copula; di contro, data una funzione copula, è possibile costruire infinite distribuzioni bivariate (multivariate).

[Appendice 2: Estrazione funzione copula data una v.a. bivariata](#)

[Appendice 3: Costruzione v.a. bivariata data una funzione copula](#)

Copule bivariate

Definizione e proprietà

La funzione di densità di una v.a. bidimensionale può essere espressa in termini di funzione di densità della copula sottostante,

$$f(x, y) = c(F(x), F(y))f(x)f(y)$$

dove $c(u, v)$ è la densità della copula, che a sua volta può essere ottenuta come,

$$c(u, v) = \frac{\partial^2 C(u, v)}{\partial u \partial v}$$

Infine, data la v.a. bidimensionale dotata di FdR $F(x, y)$, le FdR e densità condizionate possono essere espresse come segue:

$$F(x|y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} / f(y) = \frac{\partial C(F(x), F(y))}{\partial F(y)} / f(y)$$

$$f(x|y) = \frac{f(x, y)}{f(y)} = \frac{c(F(x), F(y))f(x)f(y)}{f(y)} = c(F(x), F(y))f(x)$$

Copule bivariate

Definizione e proprietà

Le funzioni copula sono invarianti rispetto a trasformazioni strettamente crescenti delle variabili, $C(\psi_1(u), \psi_2(v)) = C(u, v)$ dove ψ_1 e ψ_2 sono due funzioni strettamente crescenti.

Inoltre, valgono i seguenti risultati:

- se ψ_1 è strettamente decrescente e ψ_2 è strettamente crescente, allora

$$C(\psi_1(u), \psi_2(v)) = v - C(1 - u, v) = C_{90^\circ}(u, v)$$

che individua la copula C ruotata di 90° .

- se ψ_1 e ψ_2 sono strettamente decrescenti, allora

$$C(\psi_1(u), \psi_2(v)) = u + v - 1 + C(1 - u, 1 - v) = C_{180^\circ}(u, v)$$

che individua la copula C ruotata di 180° , definita anche *survival copula*.

- se ψ_1 è strettamente crescente e ψ_2 è strettamente decrescente, allora

$$C(\psi_1(u), \psi_2(v)) = u - C(u, 1 - v) = C_{270^\circ}(u, v)$$

che individua la copula C ruotata di 270° .

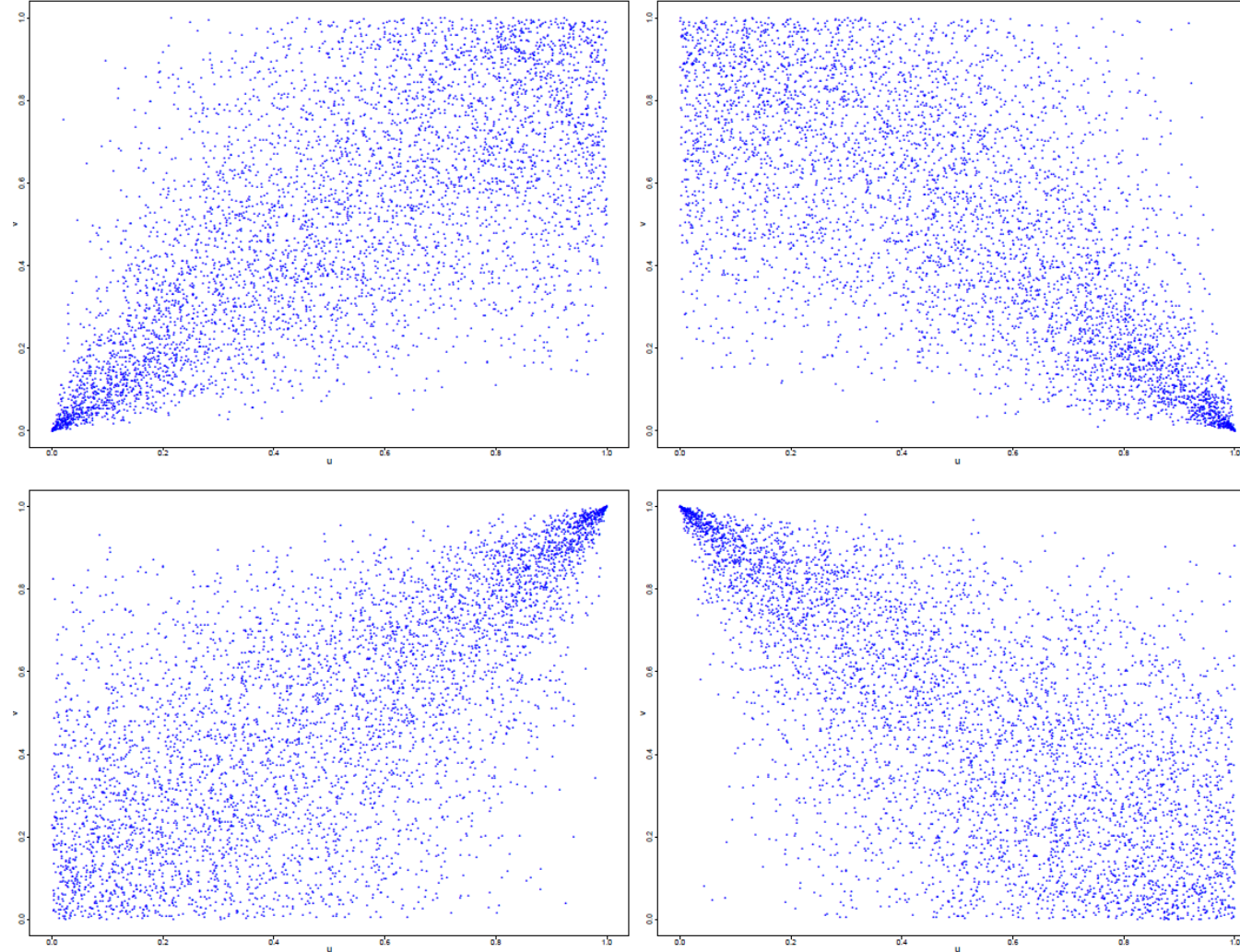
Quest'ultima, inoltre, può essere ottenuta tramite rotazione di 180° della copula C_{90° , infatti:

$$C(u, v) = u + v - 1 + [1 - v - C(u, 1 - v)] = C_{270^\circ}(u, v)$$

Copule bivariate

Definizione e proprietà

5.000 realizzazioni della copula Clayton di parametro $\theta = 2$ (grafico in alto a sinistra), della copula ruotata di 90° (grafico in alto a destra), della copula ruotata di 180° (grafico in basso a sinistra) e della copula ruotata di 270° (grafico in basso a destra).



$$\tau(C) = \tau(C_{180^\circ})$$

$$\tau(C_{90^\circ}) = \tau(C_{270^\circ})$$

$$\tau(C) = -\tau(C_{90^\circ})$$

$$\lambda_U^C = \lambda_L^{C_{180^\circ}}$$

$$\lambda_L^C = \lambda_U^{C_{180^\circ}}$$

Copule bivariate

Definizione e proprietà

Teorema: limiti di Fréchet-Hoeffding

Per ogni copula C si hanno i seguenti limiti,

$$\max(u + v - 1, 0) \leq C(u, v) \leq \min(u, v)$$

dove

$$W(u, v) = \max(u + v - 1, 0)$$

individua il limite inferiore di Fréchet-Hoeffding dato dalla copula contromonotona, mentre

$$M(u, v) = \min(u, v)$$

rappresenta il limite superiore dato dalla copula comonotona.

Le funzioni copula, quindi, permettono di costruire strutture di dipendenza che variano tra i casi di perfetta dipendenza negativa e positiva.

Il caso di indipendenza, invece, è dato dalla copula prodotto:

$$\Pi(u, v) = uv$$

Una famiglia di copule è definita "completa" (*comprehensive*) se permette di ottenere le copule W , M e Π .

Copule bivariate

Misure di dipendenza per le funzioni copule

Per simulare da una copula è possibile, in termini generali, ricorrere al *metodo della distribuzione condizionata* (Nelsen (2006)). Per generare coppie di numeri casuali dalla copula $C(u, v)$ è necessario eseguire i seguenti passaggi:

- 1) Generare due v.a. u e t indipendenti e uniformi in $[0,1]$;
- 2) Porre $v = F^{(-1)}(u|t)$, dove $F^{(-1)}$ rappresenta la funzione quasi inversa di F , con $F(u|t) = \frac{\partial C(u,t)}{\partial t}$;
- 3) Le realizzazioni distribuite secondo la copula C saranno (u, v) .

Agenda

La Dipendenza tra Variabili Aleatorie e le Copule

1. Concetti Introduttivi
2. Misure di Dipendenza
3. Copule Bivariate
- 4. Principali Famiglie di Copule Bivariate**
5. Riferimenti Bibliografici
6. Appendice

Principali famiglie di copule bivariate

Distribuzioni ellittiche

Una v.a. \mathbf{X} n -dimensionale possiede distribuzione ellittica^{1,2} di parametri $\boldsymbol{\mu}$, di dimensione $(n \times 1)$ e $\boldsymbol{\Sigma}$, matrice simmetrica e semidefinita positiva di dimensione $(n \times n)$, se

$$\mathbf{X} = \boldsymbol{\mu} + R\mathbf{A}'\mathbf{U}$$

dove,

- \mathbf{A} è una matrice $(n \times n)$ tale per cui $\mathbf{A}'\mathbf{A} = \boldsymbol{\Sigma}$, con $\text{rango}(\boldsymbol{\Sigma}) = n$;
- R è una v.a. unidimensionale (≥ 0), denominata *variabile generatrice*;
- \mathbf{U} è la v.a. n -dimensionale distribuita uniformemente sulla superficie dell'ipersfera di raggio unitario in \mathbb{R}^n . La v.a. \mathbf{U} prende il nome di base uniforme e, inoltre, è una v.a. indipendente da R .

Si noti che la conoscenza della variabile aleatoria generatrice, R , permette di generare delle realizzazioni casuali dalla v.a. \mathbf{X} .

¹ Si parla di distribuzione sferica se $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$ e $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{I}$.

² Per una trattazione approfondita del tema si rimanda a [Fang, Kotz e Ng \(1989\)](#).

Principali famiglie di copule bivariate

Distribuzioni ellittiche

I parametri $\boldsymbol{\mu}$ e $\boldsymbol{\Sigma}$ rappresentano rispettivamente i parametri di posizione e di dispersione della v.a. ellittica. Data la matrice $\boldsymbol{\Sigma}$, inoltre, si ha

$$\rho_{i,j} = \frac{\Sigma_{i,j}}{\sqrt{\Sigma_{i,i}\Sigma_{j,j}}}$$

Se le v.a. X_i e X_j possiedono media e varianza finite, vale che

$$\rho_{i,j} = \frac{\text{cov}(X_i, X_j)}{\sqrt{\text{var}(X_i)\text{var}(X_j)}}$$

e quindi $\rho_{i,j}$ coincide con il coefficiente di correlazione lineare di Pearson.

Il concetto di correlazione lineare, quindi, nel contesto delle variabili ellittiche risulta essere una naturale misura di dipendenza tra le variabili marginali coinvolte in quanto svolge un ruolo di parametro caratteristico della distribuzione multivariata stessa nonché della rispettiva copula sottostante.

La matrice di elementi $\rho_{i,j}$ è individuata con \mathbf{P} e prende il nome di matrice di correlazione (nel contesto delle copule risulta in genere più conveniente considerare tale matrice, la quale mette in evidenza direttamente i parametri di dipendenza sottostanti alle v.a. marginali).

Principali famiglie di copule bivariate

Copula Gaussiana

La copula implicitamente definita dalla distribuzione Gaussiana¹ può essere espressa come segue:

$$C(u, v) = \Phi_{\mathbf{P}}(\Phi^{-1}(u), \Phi^{-1}(v))$$

dove $\Phi_{\mathbf{P}}$ individua la FdR della v.a. Normale bidimensionale $N(\mathbf{0}, \mathbf{P})$, mentre Φ la FdR della v.a. Normale standard unidimensionale, $N(0,1)$.

La copula Gaussiana è una famiglia "completa" in quanto, sotto opportune scelte del parametro ρ , coincide con la copula prodotto, con la copula comonotona e contromonotona:

- se $\rho = -1$, $C = W$;
- se $\rho = 0$, $C = \Pi$;
- se $\rho = +1$, $C = M$.

Il τ di Kendall, come per tutte le copule ellittiche, è pari a $\tau = \frac{2}{\pi} \arcsin(\rho)$; la copula gaussiana, infine, non possiede dipendenza di coda, $\lambda_U = \lambda_L = 0$.

¹ $f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})' \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})\right\}$

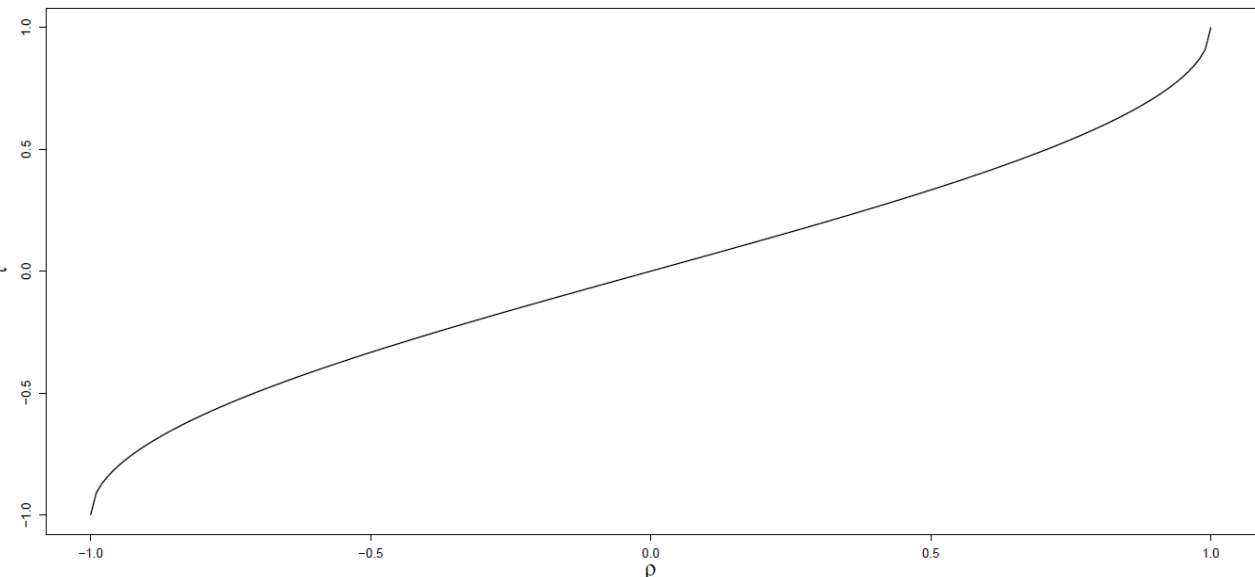
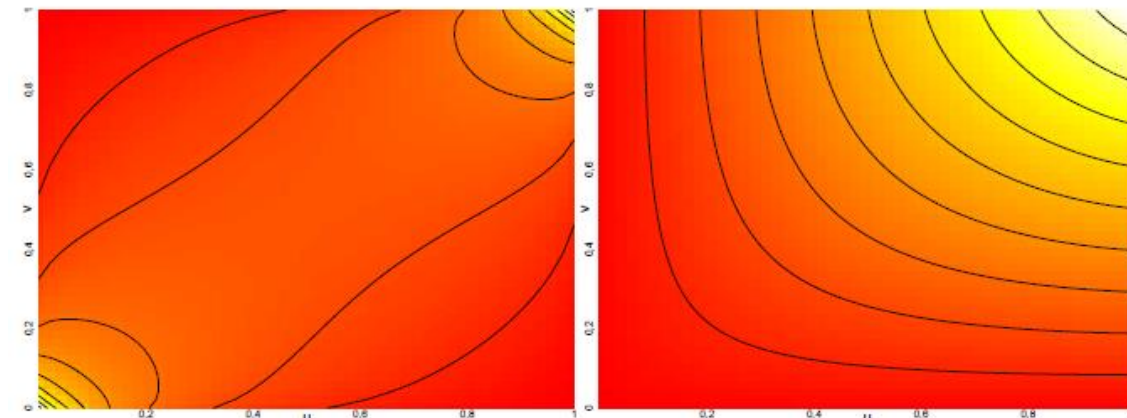
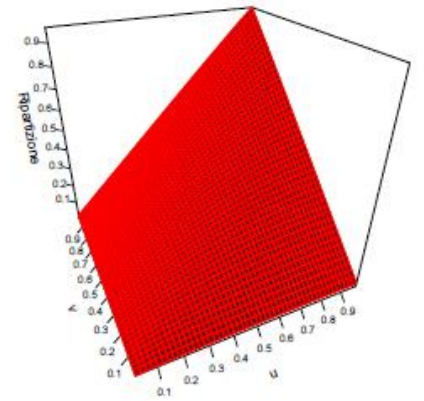
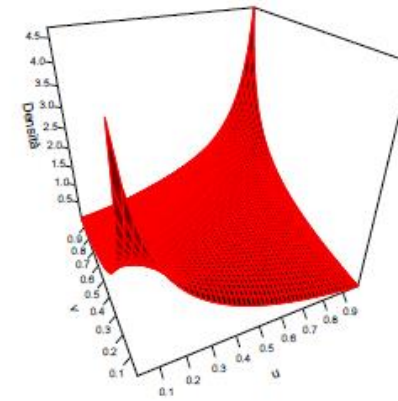
Principali famiglie di copule bivariate

Copula Gaussiana

Si noti che per simulare dalla copula gaussiana è sufficiente simulare dalla corrispondente v.a. $N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ e infine calcolare le FdR unidimensionali delle v.a. simulate (a fronte della proprietà per le copule di invarianza a trasformazioni strettamente crescenti delle v.a. marginali, la copula della distribuzione $N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ coincide con quella della variabile $N(\mathbf{0}, \mathbf{P})$, ossia la v.a. con marginali standardizzate):

- 1) Simulare (X_1, X_2) dalla v.a. $\mathbf{X} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$;
- 2) Calcolare $U = \Phi_{\mu_1, \sigma_1}(x_1)$ e $V = \Phi_{\mu_2, \sigma_2}(x_2)$

$$\rho = 0,5$$



Principali famiglie di copule bivariate

Copula t-student

La copula implicitamente definita dalla distribuzione t-student¹ può essere espressa come segue:

$$C(u, v) = \mathbf{t}_{m, \mathbf{P}}(t_m^{-1}(u), t_m^{-1}(v))$$

dove $\mathbf{t}_{m, \mathbf{P}}$ individua la FdR della v.a. t-student bidimensionale $t(\mathbf{0}, \mathbf{P}, m)$, mentre t la FdR della v.a. t-student standard unidimensionale di parametro m .

La copula t-student coincide con la copula contromonotona e comonotona per valori di ρ pari a -1 e $+1$ rispettivamente. Invece, per $\rho = 0$ (con $m < \infty$) non si ottiene la copula prodotto. Per $m \rightarrow \infty$, infine, la copula t-student coincide con la copula Gaussiana:

- se $\rho = -1$, $C = W$;
- se $\rho = +1$, $C = M$;
- se $m \rightarrow \infty$, $C = C^{\text{Gaussiana}}$

Per $\rho \neq -1$ la copula t-student possiede dipendenza di coda $\lambda_U = \lambda_L = 2t_{m+1}\left(-\sqrt{\frac{(m+1)(1-\rho)}{1+\rho}}\right)$.

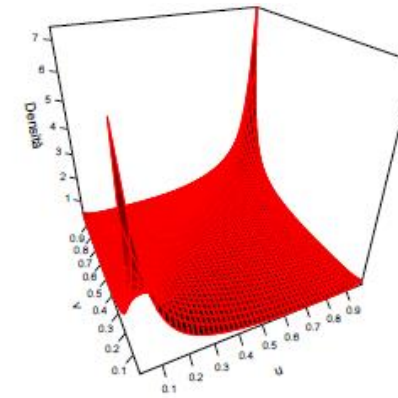
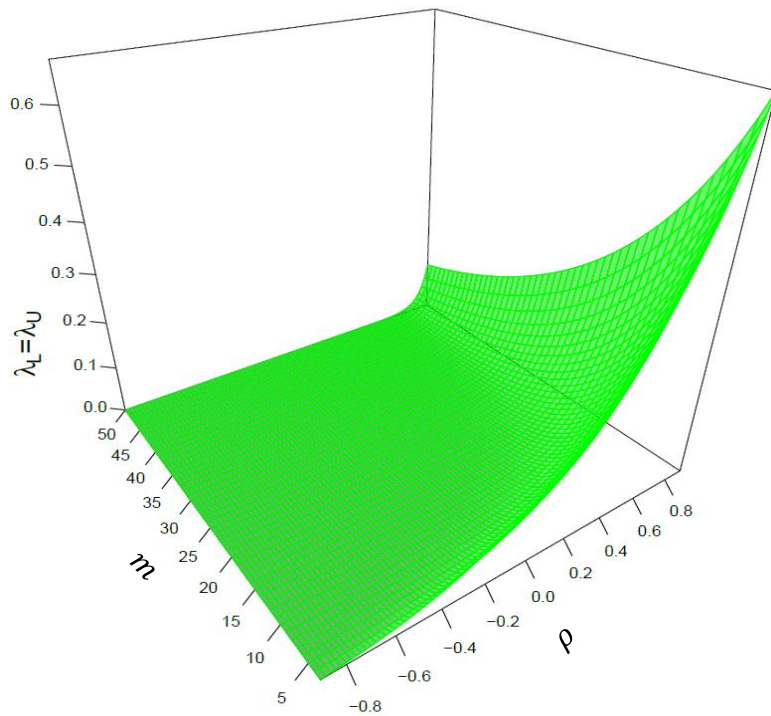
¹ $f(x_1, x_2) = \frac{1}{\pi m} \frac{\Gamma(1+\frac{m}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})} |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} \left\{ 1 + \frac{(x-\mu)'\Sigma^{-1}(x-\mu)}{m} \right\}^{-(1+m/2)}$

Principali famiglie di copule bivariate

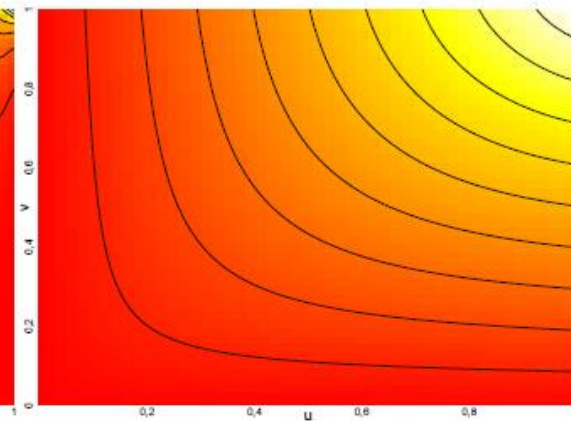
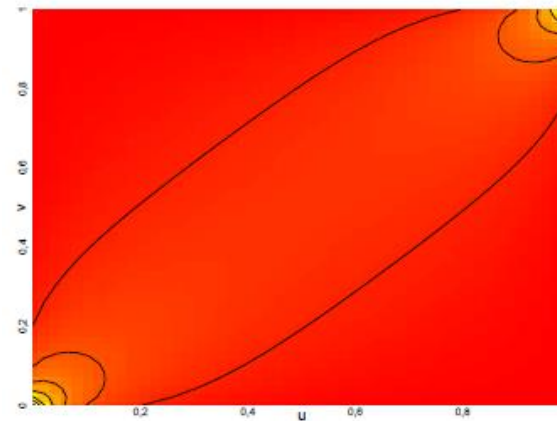
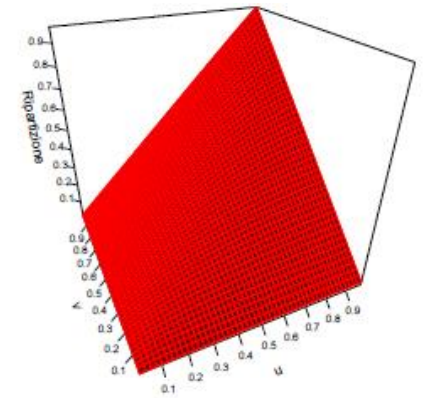
Copula t-student

Si noti che per simulare dalla copula t-student è sufficiente simulare dalla corrispondente v.a. $t(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, m)$ e infine calcolare le FdR unidimensionali delle v.a. simulate:

- 1) Simulare (X_1, X_2) dalla v.a. $\mathbf{X} \sim t(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, m)$;
- 2) Calcolare $U = t_{\mu_1, \sigma_1}(x_1)$ e $V = t_{\mu_2, \sigma_2}(x_2)$



$\rho = 0,5$



Principali famiglie di copule bivariate

Copule archimedee: definizione e proprietà

Le copule archimedee¹ sono definite tramite la funzione denominata *generatore* della copula.

In particolare, sia $\varphi: [0,1] \rightarrow [0, \infty]$ una funzione continua e strettamente decrescente, tale che $\varphi(1) = 0$ e $\varphi(0) \leq \infty$.

La pseudo-inversa di φ è la funzione $\varphi^{[-1]}$ di dominio $[0, \infty]$ data da,

$$\varphi^{[-1]}(t) = \begin{cases} \varphi^{[-1]}(t), & 0 \leq t \leq \varphi(0) \\ 0, & \varphi(0) \leq t \leq \infty \end{cases}$$

Inoltre, se $\varphi(0) = \infty$, vale che $\varphi^{[-1]} = \varphi^{-1}$.

Se la funzione φ è convessa allora,

$$C(u, v) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v))$$

è una copula archimedea bivariata.

Le copule archimedee, quindi, possono essere costruite sfruttando la relazione precedente, in quanto è sufficiente trovare un'opportuna funzione φ che sia continua, decrescente e convessa da $[0,1]$ a $[0, \infty)$ con $\varphi(1) = 0$.

¹ Per una completa trattazione del tema si rimanda a [Joe \(1997\)](#) e [Nelsen \(2006\)](#).

Principali famiglie di copule bivariate

Copule archimedee: definizione e proprietà

Le copule archimedee di generatore φ godono delle seguenti proprietà:

- C è simmetrica, $C(u, v) = C(v, u) \quad \forall u, v \in \mathbb{I}$
- C è associativa, $C[C(u, v), w] = C[u, C(v, w)] \quad \forall u, v, w \in \mathbb{I}$
- se c è una costante, allora $c\varphi$ è ancora un generatore di C .

Copule archimedee: tabella riassuntiva

Copula	Dip. Negativa	Dip. Positiva	W	Π	M
Gumbel	✗	✓	✗	✓	✓
Ali-Mikhail-Haq	✓	✓	✗	✓	✗
Clayton	✗	✓	✗	✓	✓
Frank	✓	✓	✓	✓	✓
Joe	✗	✓	✗	✓	✓
BB1	✓	✓	✗	✓	✓
BB6	✗	✓	✗	✗	✓

Principali famiglie di copule bivariate

Tabella riassuntiva

Copula	Dip. Negativa	Dip. Positiva	W	Π	M
Gaussiana	✓	✓	✓	✓	✓
t-student	✓	✓	✓	✓	✓
Gumbel	✗	✓	✗	✓	✓
Ali-Mikhail-Haq	✓	✓	✗	✓	✗
Clayton	✗	✓	✗	✓	✓
Frank	✓	✓	✓	✓	✓
Joe	✗	✓	✗	✓	✓
BB1	✓	✓	✗	✓	✓
BB6	✗	✓	✗	✗	✓
Fréchet	✓	✓	✓	✓	✓
Marshall-Olkin	✗	✓	✗	✓	✗
Farlie-Gumbel-Morgenstern	✓	✓	✗	✓	✗
Plackett	✓	✓	✓	✓	✓

Agenda

La Dipendenza tra Variabili Aleatorie e le Copule

1. Concetti Introduttivi
2. Misure di Dipendenza
3. Copule Bivariate
4. Principali Famiglie di Copule Bivariate
- 5. Riferimenti Bibliografici**
6. Appendice

Riferimenti bibliografici

- Fang, K.T., S. Kotz e K.W. Ng (1989). "Symmetric Multivariate and Related Distributions". Vol. 36. Monographs on Statistics & Applied Probability. Chapman e Hall/CRC.
- Joe, H. (1997). "Multivariate Models and Multivariate Dependence Concepts". Chapman & Hall.
- Joe, H. (2016). "Dependence Modeling with Copulas", Chapman and Hall/CRC.
- Kotz, S., N. Balakrishnan e N. L. Johnson (2000). "Continuous Multivariate Distributions", Volume 1: Models and Applications. 2^a ed. John Wiley & Sons.
- McNeil, J.A., Frey, R., Embrechts P. (2005). "Quantitative Risk Management". Princeton University Press.
- Nelsen, R.B. (2006). "An Introduction to Copulas". Springer.
- Wang, W. e M.T. Wells (2000). "Model selection and semiparametric inference for bivariate failure-time data". In: Journal of the American Statistical Association 95.449, pp. 62-72.

Agenda

La Dipendenza tra Variabili Aleatorie e le Copule

1. Concetti Introduttivi
2. Misure di Dipendenza
3. Copule Bivariate
4. Principali Famiglie di Copule Bivariate
5. Riferimenti Bibliografici
6. **Appendice**

Appendice 1: v.a. unidimensionali e bidimensionali

Variabili aleatorie unidimensionali

[Torna alla presentazione](#)

Considerando una v.a. unidimensionale, si definisce **funzione di ripartizione** (FdR) la funzione $F_X(x) = P(X \leq x)$.

La funzione $F_X(x)$ ha dominio \mathbb{R} e codominio $[0,1]$, $F_X(x): \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$.

La funzione $F_X(x)$ possiede le seguenti proprietà:

- è monotona non decrescente
- è limitata, $0 \leq F_X(x) \leq 1$
- è continua a destra
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$

Per una variabile casuale discreta si ha: $F_{\tilde{X}}(x) = \sum_{x_i \leq x} P(\tilde{X} = x_i)$ e x_i rappresentano i punti di discontinuità della funzione.

Per una variabile casuale assolutamente continua si ha: $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$, da cui $f_X(x) = \frac{\partial F_X(x)}{\partial x}$.

Appendice I: v.a. unidimensionali e bidimensionali

Variabili aleatorie bidimensionali

[Torna alla presentazione](#)

Data una v.a. bidimensionale, si definisce **funzione di ripartizione** la funzione $F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$.

La funzione $F(x, y): \mathbb{R}^2 \rightarrow [0,1]$, possiede le seguenti proprietà:

- è monotona non decrescente rispetto ad ognuno dei suoi argomenti
- è limitata, $0 \leq F(x, y) \leq 1$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x, y) = 0$ e $\lim_{y \rightarrow -\infty} F(x, y) = 0$
- $\lim_{x, y \rightarrow +\infty} F(x, y) = 1$
- Dati x_1, x_2 e y_1, y_2 con $x_1 \leq x_2, y_1 \leq y_2$ vale:

$$P(x_1 < X \leq x_2, y_1 < Y \leq y_2) = F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1) \geq 0$$

che prende il nome di "diseguaglianza rettangolare".

Appendice 1: v.a. unidimensionali e bidimensionali

Variabili aleatorie bidimensionali

[Torna alla presentazione](#)

Data una v.a. bivariata continua dotata di FdR $F(x, y)$, valgono le seguenti relazioni:

- 1) Le FdR delle v.a. marginali sono ottenute come, $F(x) = F(x, \infty)$ e $F(y) = F(\infty, y)$.
- 2) $F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_X(t) f_Y(w) dt dw$, da cui $f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}$.
- 3) Le funzioni di densità condizionate delle v.a. marginali sono definite come:

$$f(x|y) = \frac{f(x, y)}{f(y)} \quad ; \quad f(y|x) = \frac{f(x, y)}{f(x)}$$

- 4) Le FdR condizionate delle v.a. marginali sono definite come:

$$F(x|y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} / f(y) \quad ; \quad F(y|x) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} / f(x)$$

Appendice 2: Estrazione funzione copula data una v.a. bidimensionale

Definizione della funzione copula data una v.a. bidimensionale

[Torna alla presentazione](#)

Esempio *(segue)*

Si consideri la seguente funzione di ripartizione congiunta, definita in letteratura come distribuzione logistica bivariata di Gumbel (*Kotz, Balakrishnan e Johnson (2000, p. 551)*),

$$F(x, y) = (1 + e^{-x} + e^{-y})^{-1}$$

con X e $Y \in \mathbb{R}$. Tramite metodo dell'inversione è possibile esplicitare la funzione copula che lega le variabili marginali. Le FdR marginali sono ottenibili come,

$$F(x) = F(x, \infty) = (1 + e^{-x})^{-1}$$

$$F(y) = F(\infty, y) = (1 + e^{-y})^{-1}$$

Le funzioni $F(x)$ e $F(y)$ possiedono la seguente funzione inversa,

$$F^{-1}(u) = -\ln\left(\frac{1-u}{u}\right)$$

$$F^{-1}(v) = -\ln\left(\frac{1-v}{v}\right)$$

Da cui è possibile trovare la funzione copula:

Appendice 2: Definizione copula data una v.a. bidimensionale

Definizione della funzione copula data una v.a. bidimensionale

[Torna alla presentazione](#)

Data la conoscenza delle funzioni $F(x, y)$, $F^{-1}(u)$ e $F^{-1}(v)$ è possibile trovare la funzione copula:

$$\begin{aligned} C(u, v) &= F_{X,Y} \left(F_X^{-1}(u), F_Y^{-1}(v) \right) \\ &= \left[1 + \exp \left(- \left(- \ln \left(\frac{1-u}{u} \right) \right) \right) + \exp \left(- \left(- \ln \left(\frac{1-v}{v} \right) \right) \right) \right]^{-1} \\ &= \left[1 + \frac{1-u}{u} + \frac{1-v}{v} \right]^{-1} \\ &= \frac{uv}{u+v-uv} \end{aligned}$$

La copula così ottenuta appartiene alla famiglia di Ali-Mikhail-Haq; in particolare, in tale circostanza il parametro caratteristico della famiglia considerata è pari all'unità, $\theta = 1$.

Esempio (*fine*)

Appendice 3: Costruzione v.a. bidimensionale data una funzione copula

Costruzione di una v.a. bidimensionale data una funzione copula

[Torna alla presentazione](#)

Esempio

Riprendendo l'esempio precedente, è possibile mostrare come costruire una distribuzione bivariata con marginali arbitrarie e funzione copula prefissata.

Si consideri la copula Ali-Mikhail-Haq di parametro $\theta = 1$, $C(u, v) = \frac{uv}{u+v-uv}$ e si considerino le seguenti v.a. marginale dotate di FdR pari a: $F(x) = (1 + e^{-x})^{-1}$ e $F(y) = (1 + e^{-y})^{-1}$.

Ricorrendo al teorema di Sklar è possibile costruire la funzione di ripartizione congiunta:

$$\begin{aligned} F(x, y) &= C(F(x), F(y)) \\ &= \frac{(1 + e^{-x})^{-1}(1 + e^{-y})^{-1}}{(1 + e^{-x})^{-1} + (1 + e^{-y})^{-1} - (1 + e^{-x})^{-1}(1 + e^{-y})^{-1}} \\ &= (1 + e^{-x} + e^{-y})^{-1} \end{aligned}$$

che risulta essere la distribuzione logistica bivariata di Gumbel dell'esempio precedente.

Esempio (fine)

Appendice 4: Altre famiglie di copule ellittiche

Distribuzione e copula Kotz

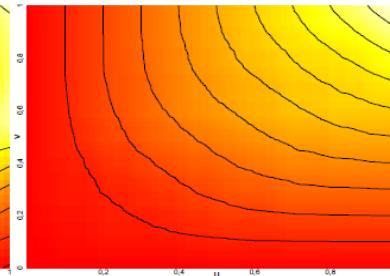
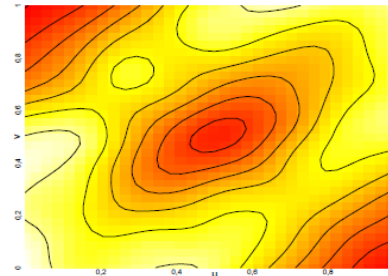
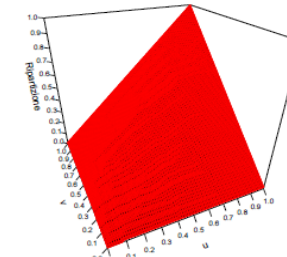
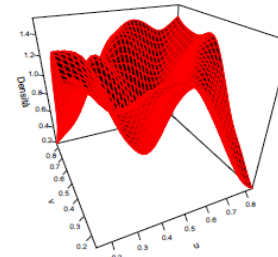
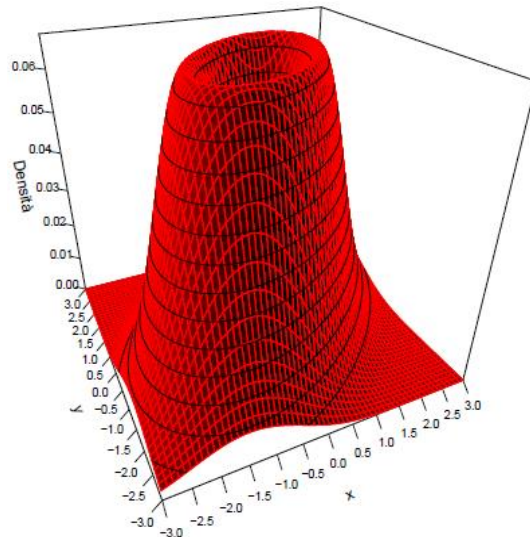
[Torna alla presentazione](#)

- Dominio: \mathbb{R}^2
- Parametri: $p, s \in \mathbb{R}^+$ e N tale per cui $2N + n > 2$ (con n numero di dimensioni considerate)
- Funzione di densità:

$$f(x_1, x_2) = \frac{s\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\pi^{1/2}\Gamma\left(\frac{N}{s}\right)} p^{N/s} |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} [(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})' \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})]^{N-1} \exp\{-p [(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})' \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})]^s\}$$

- Proprietà: se $N = s = 1$ e $p = \frac{1}{2}$, allora la v.a. coincide con la Gaussiana.

$\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0} ; s = 1 ;$
 $N = 2 ; p = 0,5$
 $; \rho = 0,5$



Appendice 4: Altre famiglie di copule ellittiche

Distribuzione e copula Pearson VII

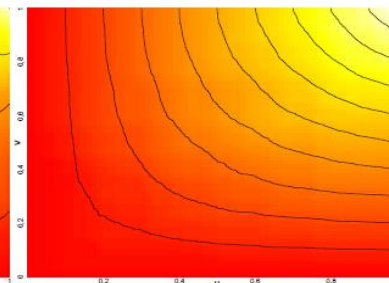
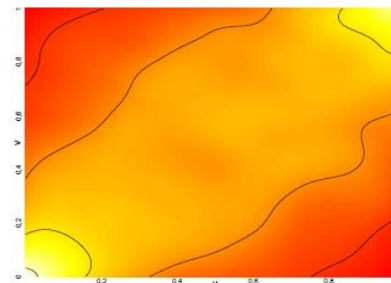
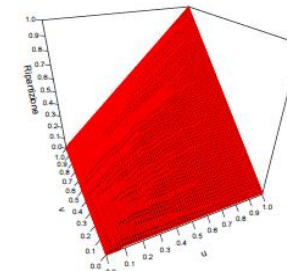
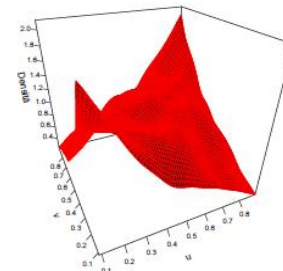
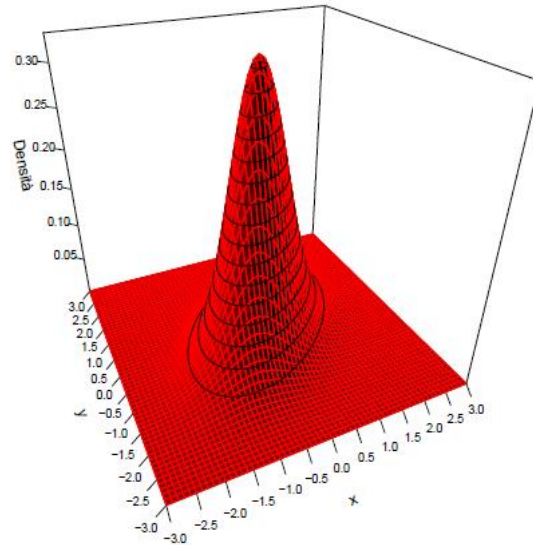
[Torna alla presentazione](#)

- Dominio: \mathbb{R}^2
- Parametri: $m \in \mathbb{R}^+$ e N tale per cui $N > \frac{n}{2}$ (con n numero di dimensioni considerate)
- Funzione di densità:

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{\pi m} \frac{\Gamma(N)}{\Gamma(N-1)} |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} \left[1 + \frac{(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})' \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})}{m} \right]^{-N}$$

- Proprietà: per $N = \frac{1}{2}(m + n)$ si ottiene la distribuzione t-student.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu} &= \mathbf{0}; m = 10 \\ &; N = 10 \\ &; \rho = 0,5 \end{aligned}$$



Appendice 4: Altre famiglie di copule ellittiche

Distribuzione e copula Exponential Power

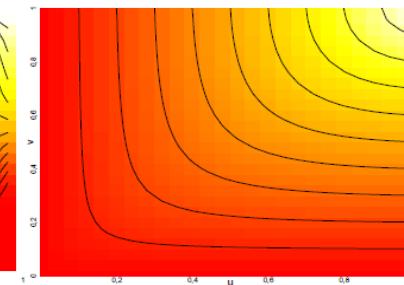
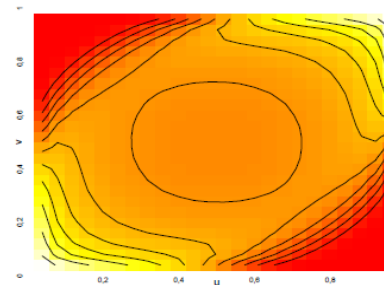
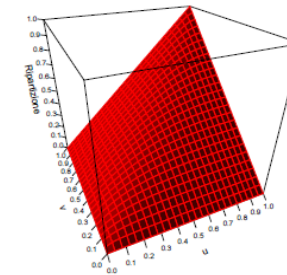
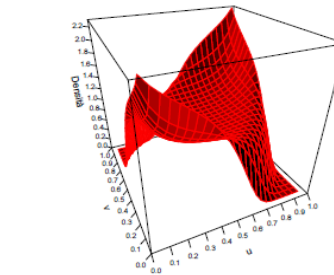
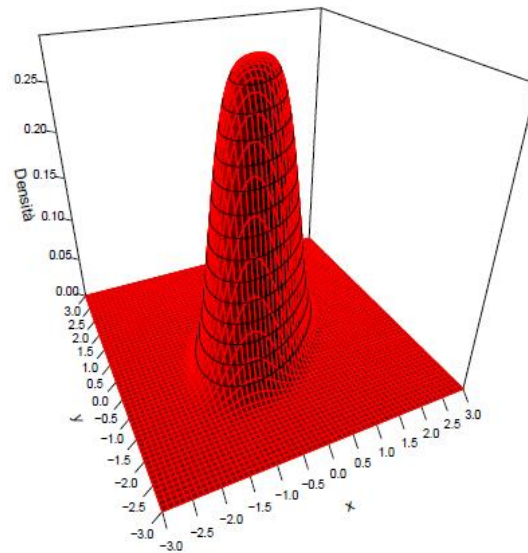
[Torna alla presentazione](#)

- Dominio: \mathbb{R}^2
- Parametri: $k \in \mathbb{R}^+$
- Funzione di densità:

$$f(x_1, x_2) = \frac{2}{\pi \Gamma\left(1 + \frac{2}{k}\right) 2^{(1+2/k)}} |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} [(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})' \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})]^{k/2}\right\}$$

- Proprietà: per $k = 2$ si ottiene la distribuzione Gaussiana.

$$\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}; k = 4$$
$$; \rho = 0,5$$



Appendice 5: Copule archimedee (peculiarità analitiche)

Copule archimedee: Gumbel

[Torna alla presentazione](#)

Tale famiglia di copule è caratterizzata dal parametro $\theta \in [1; \infty)$ ed è dotata, per $u, v \in \mathbb{I}$, della seguente FdR:

$$C(u, v) = \exp\left\{-\left[(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta\right]^{\frac{1}{\theta}}\right\}$$

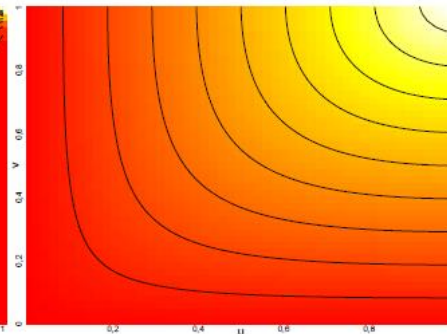
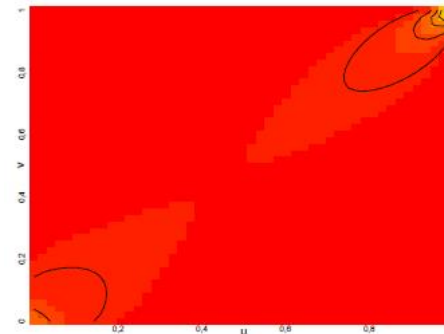
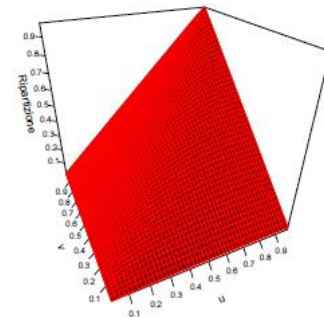
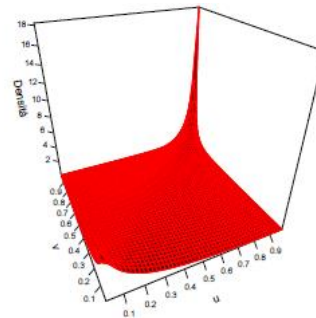
con generatore $\varphi(t) = (-\ln t)^\theta$.

Il τ di Kendall è pari a $\tau = \frac{\theta-1}{\theta}$, mentre i coefficienti di dipendenza di coda sono pari $\lambda_L = 0$ e $\lambda_U = 2 - 2\frac{1}{\theta}$.

Le proprietà di cui gode tale copula sono le seguenti:

- se $\theta = 1$, $C = \Pi$;
- se $\theta \rightarrow \infty$, $C = M$.

$$\theta = 2$$



Appendice 5: Copule archimedee (peculiarità analitiche)

Copule archimedee: Ali-Mikhail-Haq

[Torna alla presentazione](#)

Tale famiglia di copule è caratterizzata dal parametro $\theta \in [-1; +1]$ ed è dotata, per $u, v \in \mathbb{I}$, della seguente FdR:

$$C(u, v) = \frac{uv}{1 - \theta(1 - u)(1 - v)}$$

con generatore $\varphi(t) = \ln \frac{1 - \theta(1 - t)}{t}$.

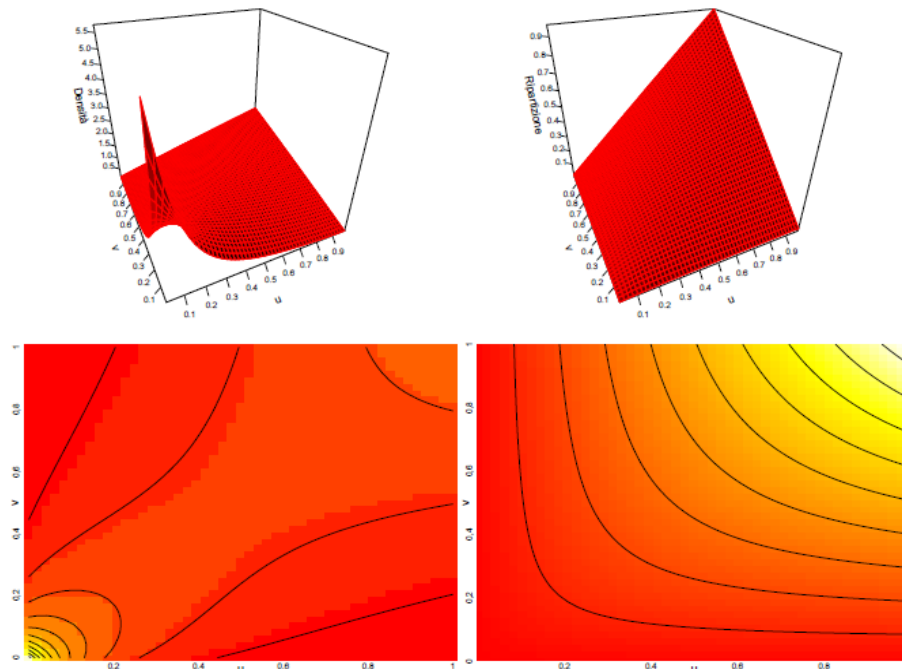
Il τ di Kendall è pari a $\tau = \frac{3\theta - 2}{3\theta} - \frac{2(1 - \theta)^2}{3\theta^2} \ln(1 - \theta)$ ed è compreso nell'intervallo $\tau \in [-0,1817; 0,3333]$.

Tale copula non possiede dipendenza di coda.

Tale copula gode dalla seguente proprietà:

- se $\theta = 0$, $C = \Pi$.

$$\theta = 0,9$$



Appendice 5: Copule archimedee (peculiarità analitiche)

Copule archimedee: Clayton

[Torna alla presentazione](#)

Tale famiglia di copule è caratterizzata dal parametro $\theta \in (0; \infty)$ ed è dotata, per $u, v \in \mathbb{I}$, della seguente FdR:

$$C(u, v) = (u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{-\frac{1}{\theta}}$$

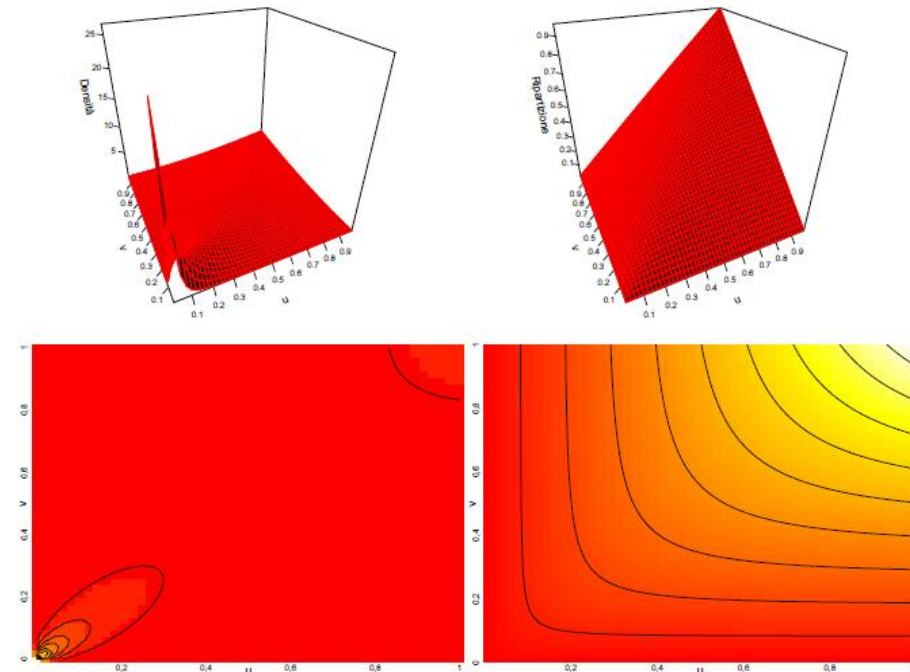
con generatore $\varphi(t) = \frac{1}{\theta}(t^{-\theta} - 1)$.

Il τ di Kendall è pari a $\tau = \frac{\theta}{\theta+2}$; tale copula possiede dipendenza di coda inferiore pari a $\lambda_L = 2^{-\frac{1}{\theta}}$ per $\theta \geq 0$.

Tale copula gode dalle seguenti proprietà:

- se $\theta \rightarrow 0$, $C = \Pi$;
- se $\theta \rightarrow \infty$, $C = M$.

$$\theta = 2$$



Appendice 5: Copule archimedee (peculiarità analitiche)

Copule archimedee: Frank

[Torna alla presentazione](#)

Tale famiglia di copule è caratterizzata dal parametro $\theta \in (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$ ed è dotata, per $u, v \in \mathbb{I}$, della seguente funzione FdR:

$$C(u, v) = -\frac{1}{\theta} \ln \left[1 + \frac{(e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)}{(e^{-\theta} - 1)} \right]$$

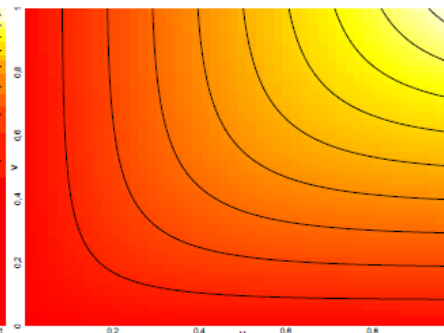
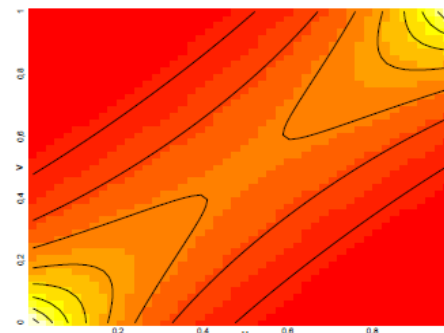
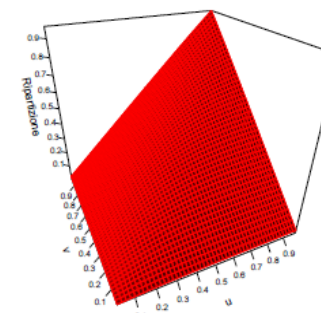
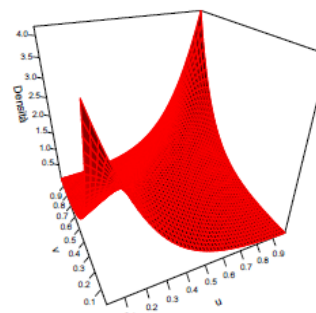
con generatore $\varphi(t) = -\ln \left(\frac{e^{-\theta t} - 1}{e^{-\theta} - 1} \right)$.

Il τ di Kendall è pari a $\tau = 1 - \frac{4}{\theta} [1 - D_1(\theta)]$, dove $D_k(x)$ è la funzione di Debye¹. Tale copula non possiede dipendenza di coda.

La copula Frank gode dalle seguenti proprietà:

- se $\theta = -\infty$, $C = W$;
- se $\theta \rightarrow 0$, $C = \Pi$;
- se $\theta \rightarrow \infty$, $C = M$.

$$\theta = 5$$



¹ $D_k(x) = \frac{k}{x^k} \int_0^x \frac{t^k}{e^t - 1} dt$.

Appendice 5: Copule archimedee (peculiarità analitiche)

Copule archimedee: Joe

[Torna alla presentazione](#)

Tale famiglia di copule è caratterizzata dal parametro $\theta \in [1; \infty)$ ed è dotata, per $u, v \in \mathbb{I}$, della seguente FdR:

$$C(u, v) = 1 - (\bar{u}^\theta + \bar{v}^\theta - \bar{u}^\theta \bar{v}^\theta)^{\frac{1}{\theta}}$$

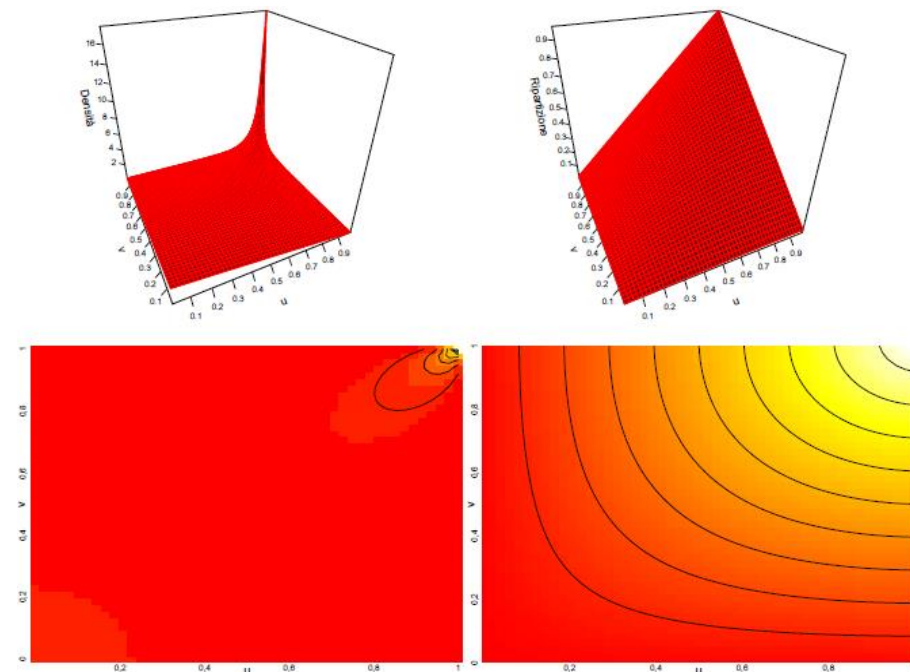
dove $\bar{u} = 1 - u$ e $\bar{v} = 1 - v$. Il generatore è $\varphi(t) = -\ln[1 - (1 - t)^\theta]$.

Il τ di Kendall è pari a $\tau = 1 + \frac{4}{\theta^2} \int_0^1 t \ln(t)(1 - t)^{2(1-\theta)/\theta} dt$. Tale copula possiede dipendenza di coda superiore pari a $\lambda_U = 2 - 2^{\frac{1}{\theta}}$.

La copula Joe gode dalle seguenti proprietà:

- se $\theta = 0$, $C = \Pi$;
- se $\theta \rightarrow \infty$, $C = M$.

$$\theta = 2$$



Appendice 5: Copule archimedee (peculiarità analitiche)

Copule archimedee: BB1

[Torna alla presentazione](#)

Tale famiglia di copule è caratterizzata da due parametri $\theta \in (0; \infty)$ e $\delta \in [1; \infty)$ ed è dotata, per $u, v \in \mathbb{I}$, della seguente FdR:

$$C(u, v) = \left\{ 1 + \left[(u^{-\theta} - 1)^\delta + (v^{-\theta} - 1)^\delta \right]^{\frac{1}{\delta}} \right\}^{-\frac{1}{\theta}}$$

con generatore $\varphi(t) = (t^\theta - 1)^\delta$.

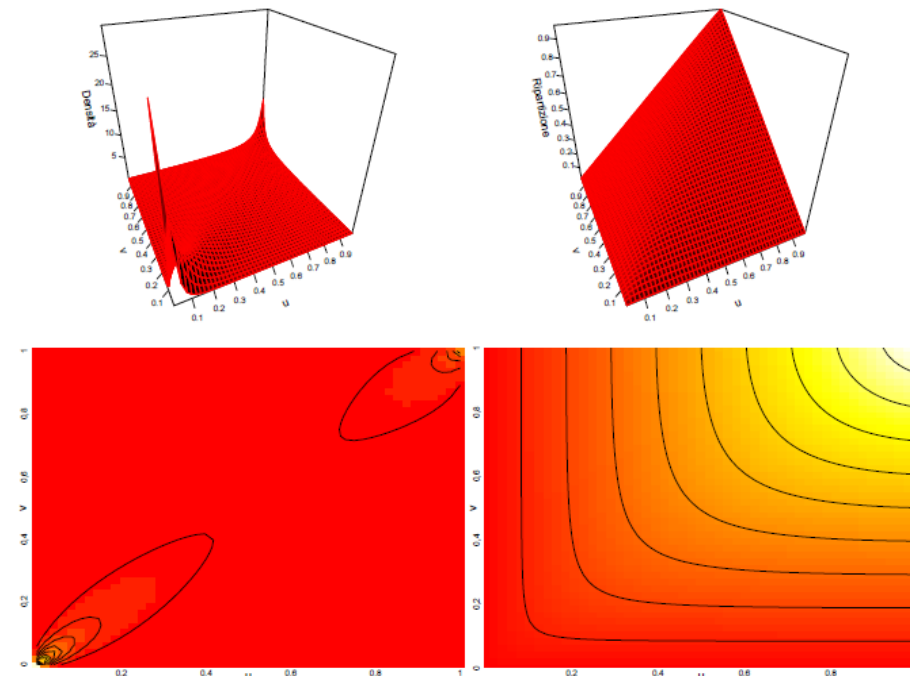
Il τ di Kendall è pari a $\tau = 1 - \frac{2}{(2+\theta)\delta}$. Tale copula possiede dipendenza di coda sia superiore che inferiore:

$$\lambda_L = 2^{-\frac{1}{\theta\delta}} \text{ e } \lambda_U = 2 - 2^{\frac{1}{\theta\delta}}.$$

La copula BB1 gode dalle seguenti proprietà:

- se $\theta \rightarrow 0$ e $\delta \rightarrow 1$, $C = \Pi$;
- se $\theta \rightarrow \infty$ e $\delta \rightarrow \infty$, $C = M$.

$\theta = 1,5$
$\delta = 1,5$



Appendice 5: Copule archimedee (peculiarità analitiche)

Copule archimedee: BB6

[Torna alla presentazione](#)

Tale famiglia di copule è caratterizzata da due parametri $\theta, \delta \in [1; \infty)$ ed è dotata, per $u, v \in \mathbb{I}$, della seguente FdR:

$$C(u, v) = 1 - \left(1 - \exp \left\{ - \left[(-\ln(1 - \bar{u}^\theta))^\delta + (-\ln(1 - \bar{v}^\theta))^\delta \right]^{\frac{1}{\delta}} \right\} \right)^{\frac{1}{\theta}}$$

dove $\bar{u} = 1 - u$ e $\bar{v} = 1 - v$. Il generatore è $\varphi(t) = 1 - \left[1 - \exp(-t^{-\frac{1}{\delta}}) \right]^\theta$.

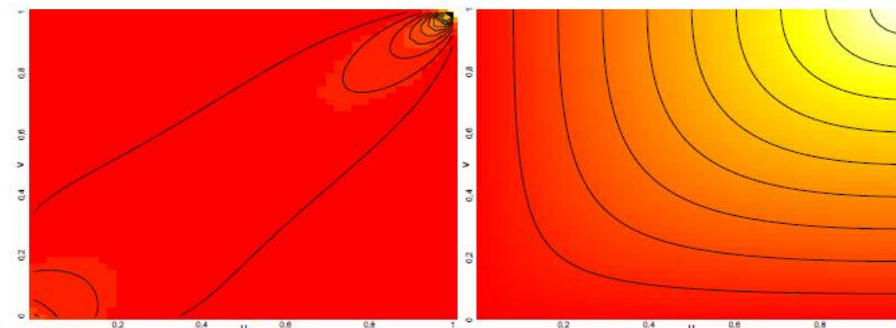
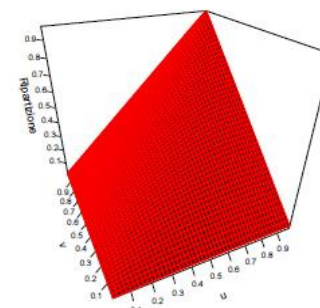
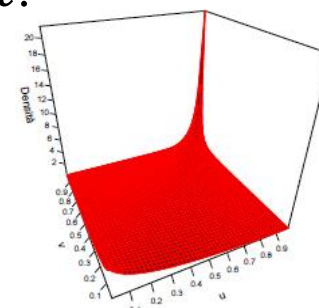
Il τ di Kendall è pari a $\tau = 1 + 4 \int_0^1 \frac{-\ln(-(1-t)^\theta + 1)(1-t - (1-t)^{-\theta} + t(1-t)^\theta)}{\theta\delta} dt$.

Tale copula possiede dipendenza di coda superiore: $\lambda_U = 2 - 2\frac{1}{\theta\delta}$.

La copula BB6 gode dalle seguenti proprietà:

- se $\theta = 1$, C coincide con la copula Gumbel;
- se $\theta \rightarrow \infty$ e $\delta \rightarrow \infty$, $C = M$.

$$\begin{aligned} \theta &= 1,5 \\ \delta &= 1,5 \end{aligned}$$



Appendice 6: Altre famiglie di copule (peculiarità analitiche)

Altre famiglie di copule: Fréchet

[Torna alla presentazione](#)

Tale famiglia di copule è caratterizzata da due parametri $\theta, \delta \in [0; 1]$, tali per cui $\theta + \delta \leq 1$, ed è dotata, per $u, v \in \mathbb{I}$, della seguente FdR:

$$C(u, v) = \theta M(u, v) + (1 - \theta - \delta) \Pi(u, v) + \delta W(u, v)$$

dove $W(u, v)$ e $M(u, v)$ rappresentano rispettivamente i limiti inferiore e superiore di Fréchet, mentre $\Pi(u, v)$ rappresenta la copula prodotto.

Il τ di Kendall è pari a $\tau = \frac{(\theta - \delta)(\theta + \delta + 2)}{3}$.

Tale copula non possiede alcuna dipendenza di coda.

La famiglia di copule di Fréchet gode dalle seguenti proprietà:

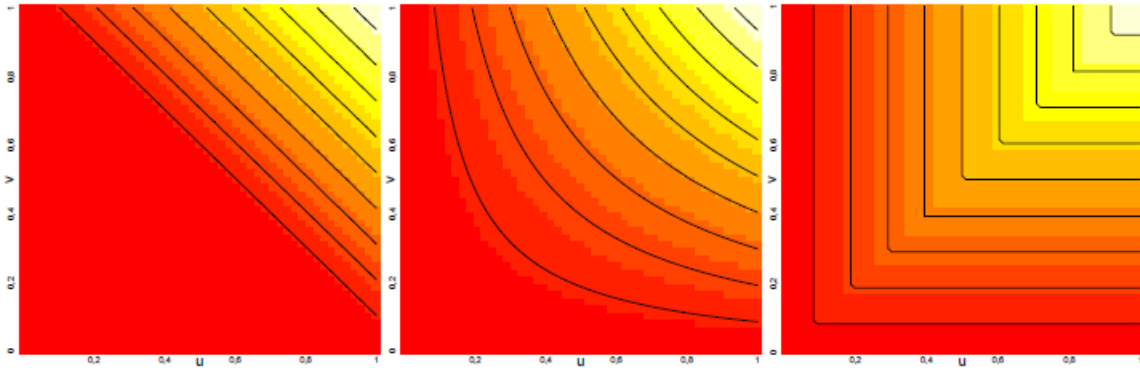
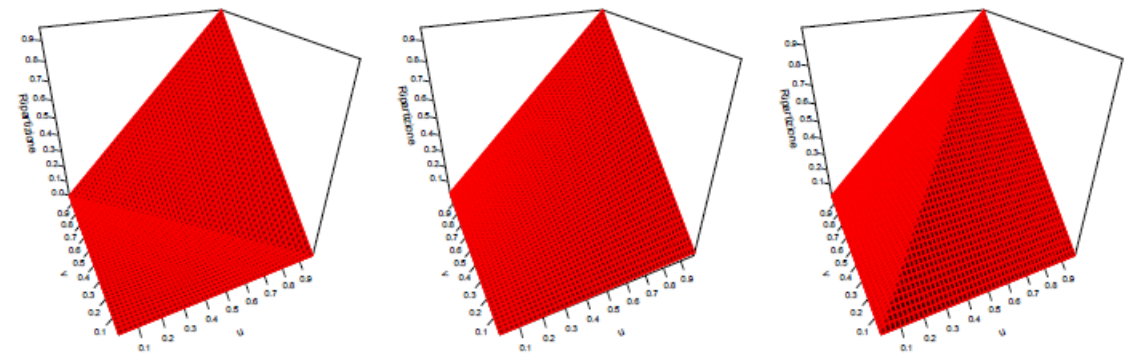
- se $\theta = 0$ e $\delta = 1$, $C = W$;
- se $\theta = \delta = 0$, $C = \Pi$;
- se $\theta = 1$ e $\delta = 0$, $C = M$.

Si noti che le copule W e M sono singolari e hanno come supporto la diagonale secondaria ($u = 1 - v$) e quella principale ($u = v$) del quadrato di lato unitario definito da \mathbb{I}^2 . La copula Π , di contro, è assolutamente continua e definita su tutto il piano \mathbb{I}^2 .

Appendice 6: Altre famiglie di copule (peculiarità analitiche)

Altre famiglie di copule: Fréchet

[Torna alla presentazione](#)



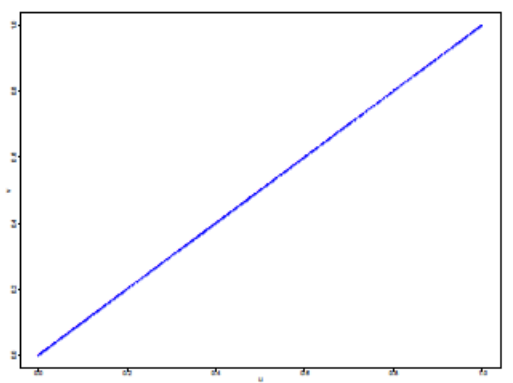
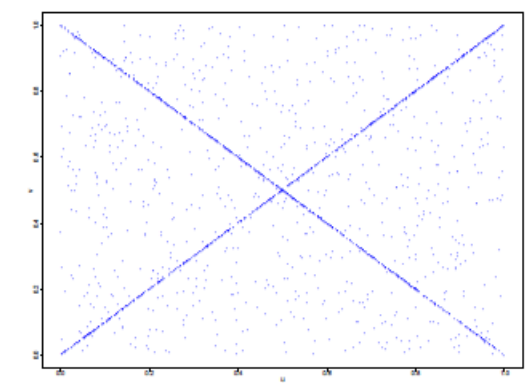
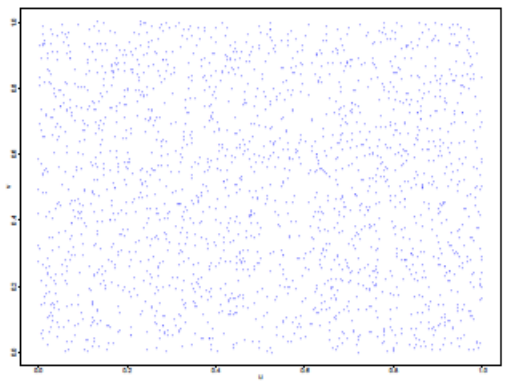
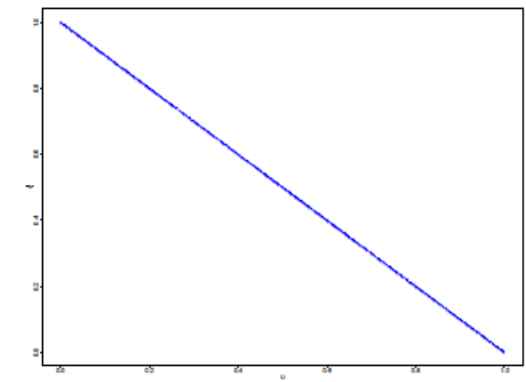
$\theta = 0$
 $\delta = 1$

$\theta = 0$
 $\delta = 0$

$\theta = 1$
 $\delta = 0$

$\theta = 0$
 $\delta = 1$

$\theta = 0$
 $\delta = 0$



$\theta = 0,3$
 $\delta = 0,3$

$\theta = 1$
 $\delta = 0$

Appendice 6: Altre famiglie di copule (peculiarità analitiche)

Altre famiglie di copule: Marshall-Olkin

[Torna alla presentazione](#)

Tale famiglia è caratterizzata da due parametri $\theta, \delta \in [0; 1]$ e possiede, per $u, v \in \mathbb{I}$, la seguente FdR:

$$C(u, v) = \min(u^{1-\theta}v, uv^{1-\delta}) = \begin{cases} u^{1-\theta}v, & u^\theta \geq v^\delta \\ uv^{1-\delta}, & u^\theta \leq v^\delta \end{cases}$$

la copula è dotata sia di una componente assolutamente continua che una singolare, individuata dalla curva $u^\theta = v^\delta$.

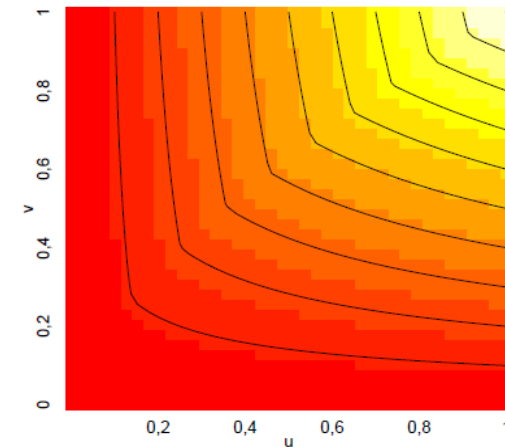
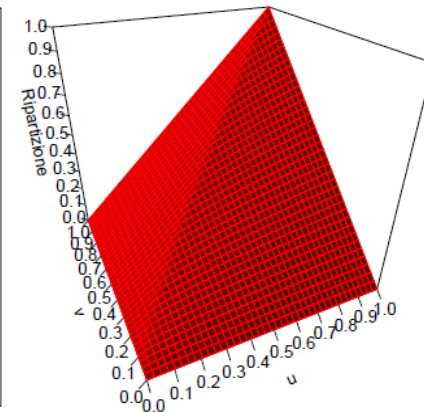
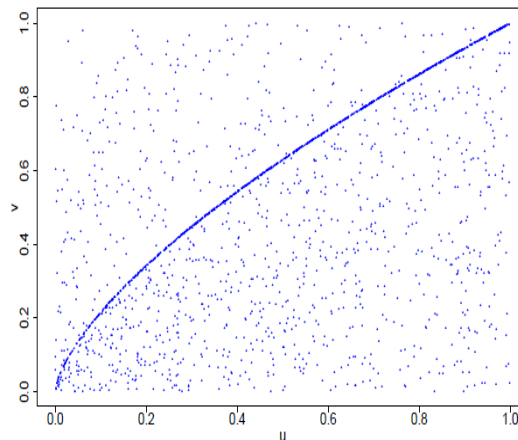
Il τ di Kendall è pari a $\tau = \frac{\theta\delta}{\theta - \theta\delta + \delta}$.

Tale copula possiede dipendenza di coda superiore, $\lambda_U = \min(\theta, \delta)$.

La famiglia di copule di Marshall-Olkin gode dalle seguenti proprietà:

- se $\theta = \delta = 0$, $C = \Pi$;
- se $\theta = \delta = 1$, $C = M$.

$$\begin{cases} \theta = 0,5 \\ \delta = 0,75 \end{cases}$$



Appendice 6: Altre famiglie di copule (peculiarità analitiche)

Altre famiglie di copule: Farlie-Gumbel-Morgenstern

[Torna alla presentazione](#)

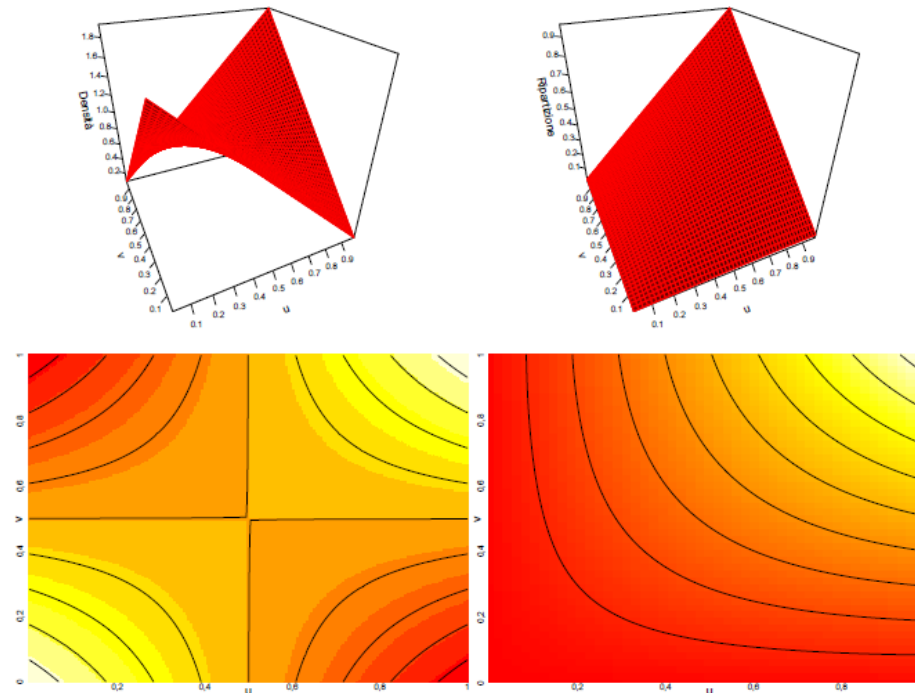
Questa famiglia definisce una classe di copule uniparametriche, dotata di parametro $\theta \in [-1; 1]$ e, per $u, v \in \mathbb{I}$, forma funzionale:

$$C(u, v) = uv + \theta uv(1 - u)(1 - v)$$

Il τ di Kendall è pari a $\tau = \frac{2\theta}{9}$, da cui $\tau \in \left[-\frac{2}{9}; \frac{2}{9}\right]$.

Tale copula non possiede dipendenza di coda e, inoltre, coincide con la copula prodotto quando $\theta = 0$:

- se $\theta = 0$, $C = \Pi$.



$\theta = 1$

Appendice 6: Altre famiglie di copule (peculiarità analitiche)

Altre famiglie di copule: Plackett

[Torna alla presentazione](#)

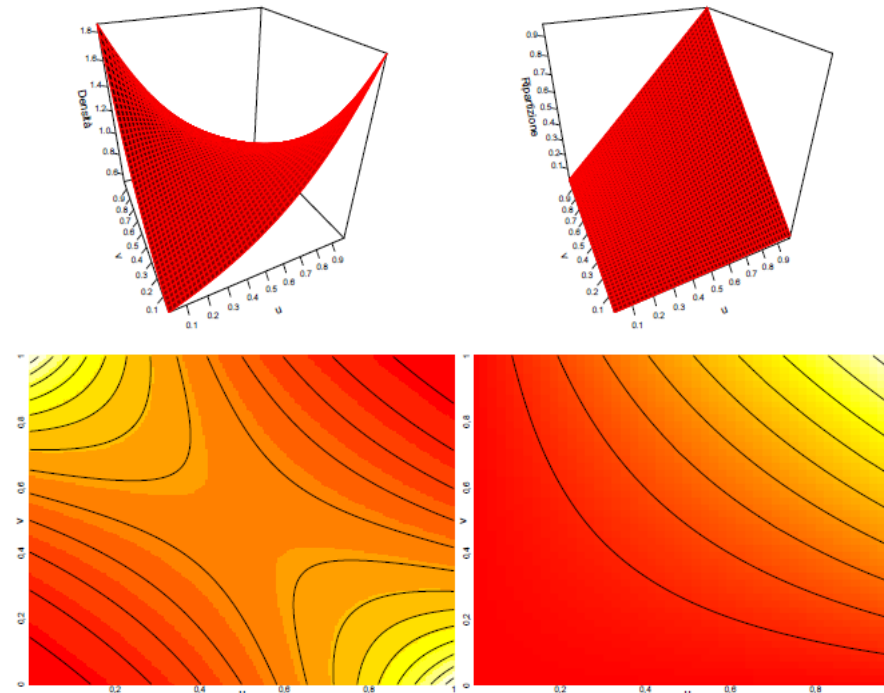
Tale famiglia è una classe di copule uniparametriche, dotata di parametro $\theta \in (0,1) \cup (1, \infty)$ e, per $u, v \in \mathbb{I}$, possiede FdR pari a:

$$C(u, v) = \frac{[1 + (\theta - 1)(u + v)] - \sqrt{[1 + (\theta - 1)(u + v)]^2 - 4uv\theta(\theta - 1)}}{2(\theta - 1)}$$

Per il τ di Kendall non esiste una forma analitica in grado di esprimerlo in funzione di θ .

Tale copula non possiede dipendenza di coda e, inoltre, gode delle seguenti proprietà:

- se $\theta \rightarrow 0^+$, $C = W$;
- se $\theta \rightarrow 1$, $C = \Pi$;
- se $\theta \rightarrow \infty$, $C = M$.



$\theta = 0,5$